

4^o Math. u. 38^m (1)

Mathematische Abhandlungen

von

Dr. Johann August Grunert

Lehrer der Mathematik und Physik am Lyceum zu Torgau

Erste Sammlung

- I. Ueber die Zerfällung der transcendenten Functionen $e^x \pm e^{-x}$, u. s. f. in Factoren.
- II. Einige Bemerkungen über die Reihe $n^m - \frac{n}{1} (n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^m - \dots$
- III. Ueber die Entwicklung der Potenzen und Logarithmen in Reihen.
- IV. Ueber einige Formeln zur leichten Berechnung des Kreises.
- V. Vermischte Bemerkungen.

Altona

bey Johann Friedrich Hammerich

1822

4^o Math. II

38 m.

John R. J. Murphy has in his
Collection of Dissections.

H e r r n H o f r a t h
J o h a n n F r i e d r i c h P f a f f
i n H a l l e

meinem mir unvergeßlichen Lehrer

als

ein schwaches Zeichen unbegrenzter Dankbarkeit

hochachtungsvoll

zugeeignet

Bayerische
Staatsbibliothek
München

V o r r e d e.

Kästner, dessen Andenken den Mathematikern immer heilig seyn wird, sagt gegen das Ende der Vorrede zu seinen *Anfangsgründen der Analysis endlicher Gröſſen*:

„Vielleicht wäre es gut, wenn niemand ein Lehrbuch schriebe, der sich nicht erst an einzelnen Untersuchungen aus seiner Wissenschaft geprüft hätte, ob er in ihr etwas zu sagen wisse, das seine Vorgänger im Compendienschreiben nicht eben so gesagt haben.“ Diese Worte eines berühmten Mathematikers mögen die Herausgabe dieser Abhandlungen, welche größtentheils trigonometrischen Inhalts sind, einigermaßen rechtfertigen, da ich die Absicht habe, mit der Zeit ein ausführliches Werk über die Trigonometrie etwa in der Ausdehnung wie die Trigonometrie von *Cagnoli* herauszugeben. Bin ich so glücklich, diese Abhandlungen von gründlichen Kennern nicht ganz ungünstig aufgenommen zu sehen, so werde ich dieser ersten Sammlung vielleicht bald eine zweyte folgen lassen, wenn es anders meine Amtsgeschäfte erlauben. Ueber den Inhalt und die Tendenz der einzelnen Abhandlungen etwas zu sagen, würde überflüssig seyn, da jeder Abhandlung eine kurze Einleitung vorausgeschickt ist, welche das Nöthige darüber enthält.

Um Irrungen vorzubeugen, bemerke ich, daß in diesen Abhandlungen einige Mal Reihen vertical abwärts geschrieben worden sind, welches sonst zwar nicht gewöhnlich ist, hier aber, um das Gesetz dieser Reihen mehr in die Augen fallend zu machen, einige Mal geschehen ist. Dies betrifft vorzüglich §. 5., §. 16., §. 18. und §. 19. der zweyten Abhandlung.

Torgau am 6ten Junius 1822.

Der Verfasser.

Vorrede
Inhalt

Die vorliegende Schrift ist eine Darstellung der Geschichte der
Kunst der Malerei in der Zeit von der Renaissance bis zur
Barockzeit. Sie ist in drei Theile gegliedert: I. Die
Renaissance, II. Die Barockzeit, III. Die
Kunst der Gegenwart. In jedem Theile sind die
wichtigsten Künstler und Werke dargestellt.
Die Schrift ist für die Kunstliebhaber und
Studierenden der Kunstgeschichte bestimmt.
Der Verfasser hat sich bemüht, die
Geschichte der Kunst in einer
einfachen und verständlichen
Weise darzustellen.

Die vorliegende Schrift ist eine
Darstellung der Geschichte der
Kunst der Malerei in der Zeit
von der Renaissance bis zur
Barockzeit. Sie ist in drei
Theile gegliedert: I. Die
Renaissance, II. Die Barockzeit,
III. Die Kunst der Gegenwart.
In jedem Theile sind die
wichtigsten Künstler und Werke
dargestellt. Die Schrift ist für
die Kunstliebhaber und
Studierenden der Kunstgeschichte
bestimmt. Der Verfasser hat
sich bemüht, die Geschichte der
Kunst in einer einfachen und
verständlichen Weise darzustellen.

I n h a l t.

Ueber die Zerfällung der transcendenten Functionen $e^x \pm e^{-x}$, $e^x \pm 2 \cos \varphi + e^{-x}$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, u. f. f. in Factoren. S. 1 — 66.

Erster Abschnitt. Ueber die Entwicklung der trigonometrischen Linien in Reihen. S. 1 — 27.

Zweyter Abschnitt. Ueber die Zerfällung der transcendenten Functionen $e^x \pm e^{-x}$, $e^x \pm 2 \cos \varphi + e^{-x}$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, u. f. f. in Factoren. S. 28 — 56.

Dritter Abschnitt. Summirung der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen. S. 57 — 64.

Anhang. S. 65 — 66.

Einige Bemerkungen über die Reihe $n^m - \frac{n}{1} (n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (n-3)^m + \dots$ S. 67 — 93.

Ueber die Entwicklung der Potenzen und Logarithmen in Reihen. S. 95 — 112.

Ueber einige Formeln zur leichten Berechnung des Kreises. S. 113 — 124.

Vermischte Bemerkungen. S. 125 — 139.

I. Geometrische Aufgabe. S. 127 — 129.

II. Summirung der Cubikzahlen. S. 130.

III. Satz über den Schwerpunkt. S. 131 — 133.

IV. Beweis des Brounker'schen Ausdrucks für das Quadrat des Durchmessers. S. 134 — 135.

V. Einige Bemerkungen über die Kettenbrüche. S. 136 — 139.

Tab. I.

Ueber die Wirkung der verschiedenen Krankheiten auf die Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Unter der Aufsicht des Herrn Hofrathes, Dr. J. J. Schlegel.

Verlegt bei der Buchhandlung des Herrn J. J. Schlegel.

Preis 1 Rthlr. 12 Gr.

Verlag des Verlegers, J. J. Schlegel.

St. Petersburg, 1811.

Ueber die Wirkung der Krankheiten auf die Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Ueber die Wirkung der Krankheiten auf die Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Ueber einige Krankheiten der Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Ueber die Krankheiten der Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Ueber die Krankheiten der Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Ueber die Krankheiten der Fruchtbarkeit.

St. Petersburg, 1811.

Ueber
die Zerfällung
der
transcendenten Functionen $e^x \pm e^{-x}$, $e^x \pm 2 \cos \varphi + e^{-x}$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, u. f. f.
in Factoren.

Erster Abschnitt.

Ueber die Entwicklung der trigonometrischen Linien in Reihen.

§. 1.

Da die Beweise der Formeln, welche den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen, vorzüglich auf der bekannten Reihe für den Sinus durch den Bogen beruhen, so werden einige Bemerkungen über diese Reihe und die übrigen Reihen für die trigonometrischen Linien hier nicht ganz am unrechten Orte seyn.

Die Wichtigkeit der genannten Reihe und die geringe geometrische Schärfe der ältern Beweise derselben, welche sich alle des Begriffs vom Unendlichen bedienen, hat die neuern Mathematiker veranlaßt, genügendere elementarische Beweise aufzusuchen. ^{a)} Doch möchte sich auch gegen diese Beweise vielleicht noch Einiges einwenden lassen. Indem nämlich in denselben für $\sin x$ eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von x mit unbestimmten Coefficienten angenommen wird, beruhen sie alle auf der Voraussetzung, daß sich $\sin x$ in eine solche Reihe entwickeln lasse, und diese Voraussetzung wird in diesem Falle nicht durch die Entwicklung selbst gerechtfertigt, wie dies sonst wohl der Fall ist. Gegen den bekannten Lagrangischen Beweis des Satzes, daß sich jede Function von x in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lasse, ^{b)} haben schon berühmte Mathematiker: *Lacroix*, *Pasquich* u. A., ^{c)} sehr gründliche Erinnerungen gemacht, denen sich vielleicht auch noch andere beyfügen ließen.

^{a)} Beweise durch das Unendliche s. m. in *L. Euleri Introd. in Anal. Inf.* I. §. 134.; *Pasquich Unterricht in der mathematischen Analysis und Maschinenlehre.* I. Leipzig 1790. S. 537. — Den Begriff des Unendlichen findet man vermieden in *S. F. Lacroix Traité du Calcul diff. et du Calcul int.* T. I. édit. 2. Paris 1810. 4. p. 58.; *S. L'Huilier Principiorum calculi diff. et int. expositio element.* Tub. 1795. 4. Cap. VII.

^{b)} *Lagrange Théorie des fonctions analyt.* Paris 1813. 4. p. 8. sqq. und *Leçons sur le Calcul des fonctions.* Paris 1806. 8. p. 8. sqq.

^{c)} *Lacroix a. a. O.* T. III. Paris 1819. p. 629. *Pasquich Elementa Analyseos et Geometriae sublimioris.* Lipsiae 1799. 4. Introd. XVIII.

Ich mache daher, auf dem von *Euler* eingeschlagenen Wege weiter fortschreitend, hier einen Versuch, die Reihe für den Sinus ohne die erwähnte Voraussetzung elementarisch zu beweisen; und wenn auch dieser Beweis sich nicht durch Kürze empfiehlt, so scheint er mir doch eine bessere Einsicht in die Natur des Gegenstandes zu gewähren, als die gewöhnlichen Beweise durch die Methode der unbestimmten Coefficienten vermögen. Diese sind eigentlich bloße analytische Auflösungen der Aufgabe, den Sinus von x in eine Reihe nach Potenzen von x zu entwickeln, und keine synthetischen Beweise, welche doch allein volle Ueberzeugung gewähren.

Ähnliche Bemerkungen sind auch über einige Beweise der Binomial-Formel und der logarithmischen Reihen zu machen.

A. Die Reihe für den Sinus.

§. 2.

Als Lemma aus der Trigonometrie schicken wir folgenden Satz voraus, auf welchem unser Beweis der Reihe für den Sinus vorzüglich beruhet.

Für jedes ganze positive n ist:

$$\begin{aligned} \text{I. } \sin n\varphi = & \frac{n}{1} \cos \varphi^{n-1} \cdot \sin \varphi \\ & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \varphi^{n-3} \cdot \sin \varphi^3 \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cos \varphi^{n-5} \cdot \sin \varphi^5 \\ & - \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cos \varphi^{n-7} \cdot \sin \varphi^7 \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \cos n\varphi = & \cos \varphi^n \\ & - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos \varphi^{n-2} \cdot \sin \varphi^2 \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos \varphi^{n-4} \cdot \sin \varphi^4 \\ & - \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos \varphi^{n-6} \cdot \sin \varphi^6 \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

Beweis.

1. Aus den Anfangsgründen der Trigonometrie ist bekannt, daß $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, so daß also der Satz für $n=1$ und $n=2$ gilt.

2. Er gelte für n : so ist

$$\begin{aligned}
 \sin(n+1)\varphi &= \sin n\varphi \cdot \cos \varphi + \cos n\varphi \cdot \sin \varphi \\
 &= \frac{n}{1} \cos \varphi^n \cdot \sin \varphi && + \cos \varphi^n \cdot \sin \varphi \\
 &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \varphi^{n-2} \cdot \sin \varphi^3 && - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos \varphi^{n-2} \cdot \sin \varphi^3 \\
 &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1 \dots 5} \cos \varphi^{n-4} \cdot \sin \varphi^5 && + \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{1 \dots 4} \cos \varphi^{n-4} \cdot \sin \varphi^5 \\
 &\quad - \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{1 \dots 7} \cos \varphi^{n-6} \cdot \sin \varphi^7 && - \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \dots 6} \cos \varphi^{n-6} \cdot \sin \varphi^7 \\
 &\quad + \text{u. f. f.} && + \text{u. f. f.} \\
 &= \left\{ \frac{n}{1} + 1 \right\} \cos \varphi^n \cdot \sin \varphi \\
 &\quad - \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \right\} \cos \varphi^{n-2} \cdot \sin \varphi^3 \\
 &\quad + \left\{ \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1 \dots 5} + \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{1 \dots 4} \right\} \cos \varphi^{n-4} \cdot \sin \varphi^5 \\
 &\quad - \left\{ \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{1 \dots 7} + \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \dots 6} \right\} \cos \varphi^{n-6} \cdot \sin \varphi^7 \\
 &\quad + \text{u. f. f.} \\
 &= \frac{n+1}{1} \cos \varphi^{n+1-1} \cdot \sin \varphi \\
 &\quad - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \varphi^{n+1-3} \cdot \sin \varphi^3 \\
 &\quad + \frac{(n+1)n \dots (n-3)}{1 \dots 5} \cos \varphi^{n+1-5} \cdot \sin \varphi^5 \\
 &\quad - \frac{(n+1)n \dots (n-5)}{1 \dots 7} \cos \varphi^{n+1-7} \cdot \sin \varphi^7 \\
 &\quad + \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

Die Reihe für den Sinus gilt also auch für $\sin(n+1)\varphi$.

Auf ähnliche Art ist

$$\begin{aligned}
 \cos(n+1)\varphi &= \cos n\varphi \cdot \cos \varphi - \sin n\varphi \cdot \sin \varphi \\
 &= \cos \varphi^{n+1} \\
 &\quad - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos \varphi^{n-1} \cdot \sin \varphi^2 && - \frac{n}{1} \cos \varphi^{n-1} \cdot \sin \varphi^2 \\
 &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{1 \dots 4} \cos \varphi^{n-3} \cdot \sin \varphi^4 && + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \varphi^{n-3} \cdot \sin \varphi^4 \\
 &\quad - \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \dots 6} \cos \varphi^{n-5} \cdot \sin \varphi^6 && - \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1 \dots 5} \cos \varphi^{n-5} \cdot \sin \varphi^6 \\
 &\quad + \text{u. f. f.} && + \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \varphi^{n+1} \\
 &\quad - \left\{ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n}{1} \right\} \cos \varphi^{n-1} \cdot \sin \varphi^2 \\
 &\quad + \left\{ \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{1 \dots 4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} \cos \varphi^{n-3} \cdot \sin \varphi^4 \\
 &\quad - \left\{ \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \dots 6} + \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1 \dots 5} \right\} \cos \varphi^{n-5} \cdot \sin \varphi^6 \\
 &\quad + \text{u. f. f.} \\
 &= \cos \varphi^{n+1} \\
 &\quad - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \cos \varphi^{n+1-2} \cdot \sin \varphi^2 \\
 &\quad + \frac{(n+1)n \dots (n-2)}{1 \dots 4} \cos \varphi^{n+1-4} \cdot \sin \varphi^4 \\
 &\quad - \frac{(n+1)n \dots (n-4)}{1 \dots 5} \cos \varphi^{n+1-6} \cdot \sin \varphi^6 \\
 &\quad + \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

Also gilt auch die Reihe für $\cos n\varphi$, wenn man $n+1$ für n setzt.

Der Satz gilt also für $n+1$, wenn er für n gilt, und ist mithin allgemein, da er für $n=1$ und $n=2$ gilt, wie wir oben gesehen haben.

§. 3.

Wenn man in §. 2. I. $\varphi = \frac{x}{n}$ setzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \frac{n}{1} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \cdot \sin \frac{x}{n} \\
 &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \cdot \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \\
 &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1 \dots 5} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \cdot \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \\
 &\quad - \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{1 \dots 7} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-7} \cdot \left(\sin \frac{x}{n} \right)^7 \\
 &\quad + \text{u. f. f.} \\
 &= \frac{n}{1} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \cdot \sin \frac{x}{n} \\
 &\quad - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \cdot \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \\
 &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \dots 5} \cdot n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \cdot \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{6}{n}\right)}{1\cdot\cdot\cdot 7}\cdot n^7\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n-7}\cdot\left(\sin\frac{x}{n}\right)^7$$

+ u. f. f.

§. 4.

Ehe wir weiter gehen, setzen wir noch Folgendes fest:

1. Die Bedeutung aller vorkommenden Zeichen sey auf positive Gröſſen eingeschränkt. Bey Ausdrücken mit Minuszeichen wird bloß auf ihren absoluten Werth Rücksicht genommen. So ist z. B. hier $5+6-3=8$, und auch $3-5-6=8$.

2. Die größte unter mehrern Gröſſen a, b, c, d , u. f. f. werde durch $M[a, b, c, d, \dots]$ bezeichnet. Es ist z. B. $M\left[7, \frac{1}{2}, 9, \frac{2}{3}, 8\right]=9$.

3. ν soll immer jede gegebene noch so kleine Gröſſe bezeichnen. Alle übrige griechische Buchstaben mit oder ohne Indices sollen von ν abhängige Gröſſen bezeichnen.

4. So oft im Folgenden ein Ausdruck von der Form $Fx < \nu$ für $x > \alpha$, oder $\Phi x < \nu$ für $x > \beta$ vorkommt, so soll darunter immer Dieses verstanden werden:

Die vor dem Zeichen $<$ stehende Function kann kleiner als jede gegebene Gröſſe ν werden, wenn man die veränderliche Gröſſe dieser Function größer nimmt, als eine gewisse gegebene von ν abhängige Gröſſe.

5. Der Gebrauch dieser abkürzenden Bezeichnungen schien uns zur Erleichterung der Uebersicht des Beweises nöthig zu seyn. Uebrigens bemerken wir noch, daß $\alpha, \beta, \gamma, \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots; \alpha'', \beta'', \gamma'', \dots$ u. f. w., in verschiedenen Paragraphen und selbst in verschiedenen Abschnitten desselben Paragraphen nicht immer einerley Bedeutung zu haben brauchen.

§. 5.

1. Wenn $A-Fx < \nu$ für $x > \alpha$, und $A'-F'x < \nu$ für $x > \alpha'$ ist: so ist auch $AA'-Fx.F'x < \nu$ für $x > \beta$.

Beweis.

Sey $A-Fx=y$, $A'-F'x=y'$, so ist $A-y=Fx$, $A'-y'=F'x$; also $AA'-A'y-Ay'+yy'=Fx.F'x$, $AA'-Fx.F'x=A'y+Ay'-yy'$.

Da nun nach der Voraussetzung $A-Fx$ und $A'-F'x$ kleiner als jede gegebene Gröſſe werden kann, so sey $y < \frac{\nu}{3A}$ für $x > \beta'$, $y' < \frac{\nu}{3A'}$ für $x > \beta''$, $y < \frac{1}{3}$ für

$x > \beta'''$, $y' < \nu$ für $x > \beta'''$; also $Ay < \frac{1}{3}\nu$ für $x > \beta'$, $A'y' < \frac{1}{3}\nu$ für $x > \beta''$, $yy' < \frac{1}{3}\nu$ für $x > M[\beta''', \beta''']$. d) Also $Ay + A'y' + yy' < \nu$ für $x > M[\beta', \beta'', \beta''', \beta''']$, oder $Ay + A'y' - yy' < \nu$ für $x > M[\beta', \beta'', \beta''', \beta''']$, d. i. $AA' - Fx.F'x < \nu$ für $x > \beta$.

2. Wenn $A - Fx < \nu$ für $x > \alpha$, $A' - F'x < \nu$ für $x > \alpha'$, $A'' - F''x < \nu$ für $x > \alpha''$; so ist auch $AA'A'' - Fx.F'x.F''x < \nu$ für $x > \gamma$.

Beweis.

Es ist $AA' - Fx.F'x < \nu$ für $x > \beta$, (1.), $A'' - F''x < \nu$ für $x > \alpha''$; also $AA'A'' - Fx.F'x.F''x < \nu$ für $x > \gamma$, (1.).

3. Wenn $A - Fx < \nu$ für $x > \alpha$, $A' - F'x < \nu$ für $x > \alpha'$, $A'' - F''x < \nu$ für $x > \alpha''$, $A''' - F'''x < \nu$ für $x > \alpha'''$ ist: so ist auch $AA'A''A''' - Fx.F'x.F''x.F'''x < \nu$ für $x > \delta$.

Beweis.

Es ist $AA'A'' - Fx.F'x.F''x < \nu$ für $x > \gamma$, (2.), und $A''' - F'''x < \nu$ für $x > \alpha'''$; also $AA'A''A''' - Fx.F'x.F''x.F'''x < \nu$ für $x > \delta$, (1.).

4. Man sieht leicht, daß man auf diese Art immer weiter gehen könnte; das Gesetz liegt aber schon klar vor Augen.

§. 6.

Wenn n als veränderlich, p aber als constant betrachtet wird; so ist

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(\frac{p+1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < \nu \text{ für } n > \alpha.$$

Beweis.

Es ist offenbar $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < 1$ für $n > p$, $\frac{p+1}{n} < \nu$ für $n > \frac{p+1}{\nu}$;

also, indem man beide Bedingungen zu gleicher Zeit erfüllt und multiplicirt:

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(\frac{p+1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < 1 \cdot \nu \text{ für } n > M\left[p, \frac{p+1}{\nu}\right], \text{ d. i.}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(\frac{p+1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < \nu \text{ für } n > \alpha.$$

d) Indem man nämlich x größer als die größte der zwey Größen β''' und β'''' nimmt, erfüllt man beide Bedingungen $x > \beta'''$ und $x > \beta''''$ zu gleicher Zeit; daher ist offenbar $yy' < \frac{1}{3}\nu$ für $x > M[\beta''', \beta''']$.

§. 7.

Es ist $\frac{1}{1 \dots p(p+1)} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right)}{1 \dots p(p+1)} < \nu$ für $n > \alpha$.

Beweis.

1. Für $p=1$ ist $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2n}$; aber $\frac{1}{2n} < \nu$ für $n > \frac{1}{2\nu}$; also $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} < \nu$ für $n > \frac{1}{2\nu}$, d. i. für $n > \alpha$,

2. Sey $p=2$. Es ist $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; aber $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} < \frac{3\nu}{2}$ für $n > \beta$, (1.); also $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \beta$; aber auch $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \beta'$, (§. 6.); also $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \nu$ für $n > M[\beta, \beta']$, d. i. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \nu$ für $n > \alpha$.

Es braucht wohl nicht erst erinnert zu werden, daß dieses α nicht mit dem α in 1. einerley zu seyn braucht. M. f. §. 4. 4.

3. Sey $p=3$. Es ist $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \dots 4} = \frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \dots 4} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n}}{1 \dots 4}$. Aber $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{4\nu}{2}$ für $n > \gamma$, (2.), oder $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \dots 4} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \gamma$; aber $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n}}{1 \dots 4} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \gamma'$, (§. 6.); also $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \dots 4} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n}}{1 \dots 4} < \nu$ für $n > M[\gamma, \gamma']$, d. i. $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \dots 4} < \nu$ für $n > \alpha$.

$x > \beta'''$, $y' < \nu$ für $x > \beta'''$; also $Ay < \frac{1}{3}\nu$ für $x > \beta'$, $A'y' < \frac{1}{3}\nu$ für $x > \beta''$, $yy' < \frac{1}{3}\nu$ für $x > M[\beta''', \beta''']$. d) Also $Ay + A'y' + yy' < \nu$ für $x > M[\beta', \beta'', \beta''', \beta''']$, oder $Ay + A'y' - yy' < \nu$ für $x > M[\beta', \beta'', \beta''', \beta''']$, d. i. $AA' - Fx.F'x < \nu$ für $x > \beta$.

2. Wenn $A - Fx < \nu$ für $x > \alpha$, $A' - F'x < \nu$ für $x > \alpha'$, $A'' - F''x < \nu$ für $x > \alpha''$; so ist auch $AA'A'' - Fx.F'x.F''x < \nu$ für $x > \gamma$.

Beweis.

Es ist $AA' - Fx.F'x < \nu$ für $x > \beta$, (1.), $A'' - F''x < \nu$ für $x > \alpha''$; also $AA'A'' - Fx.F'x.F''x < \nu$ für $x > \gamma$, (1.).

3. Wenn $A - Fx < \nu$ für $x > \alpha$, $A' - F'x < \nu$ für $x > \alpha'$, $A'' - F''x < \nu$ für $x > \alpha''$, $A''' - F'''x < \nu$ für $x > \alpha'''$ ist: so ist auch $AA'A''A''' - Fx.F'x.F''x.F'''x < \nu$ für $x > \delta$.

Beweis.

Es ist $AA'A'' - Fx.F'x.F''x < \nu$ für $x > \gamma$, (2.), und $A''' - F'''x < \nu$ für $x > \alpha'''$; also $AA'A''A''' - Fx.F'x.F''x.F'''x < \nu$ für $x > \delta$, (1.).

4. Man sieht leicht, daß man auf diese Art immer weiter gehen könnte; das Gesetz liegt aber schon klar vor Augen.

§. 6.

Wenn n als veränderlich, p aber als constant betrachtet wird; so ist

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(\frac{p+1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < \nu \text{ für } n > \alpha.$$

Beweis.

$$\text{Es ist offenbar } \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < 1 \text{ für } n > p, \frac{p+1}{n} < \nu \text{ für } n > \frac{p+1}{\nu};$$

also, indem man beide Bedingungen zu gleicher Zeit erfüllt und multiplicirt:

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(\frac{p+1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < 1 \cdot \nu \text{ für } n > M\left[p, \frac{p+1}{\nu}\right], \text{ d. i.}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(\frac{p+1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)} < \nu \text{ für } n > \alpha.$$

d) Indem man nämlich x größer als die größte der zwey Größen β''' und β'''' nimmt, erfüllt man beide Bedingungen $x > \beta'''$ und $x > \beta''''$ zu gleicher Zeit; daher ist offenbar $yy' < \frac{1}{3}\nu$ für $x > M[\beta''', \beta''']$.

§. 7.

Es ist $\frac{1}{1 \dots p(p+1)} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right)}{1 \dots p(p+1)} < \nu$ für $n > \alpha$.

Beweis.

1. Für $p=1$ ist $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2n}$; aber $\frac{1}{2n} < \nu$ für $n > \frac{1}{2\nu}$; also $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} < \nu$ für $n > \frac{1}{2\nu}$, d. i. für $n > \alpha$,

2. Sey $p=2$. Es ist $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; aber $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} < \frac{3\nu}{2}$ für $n > \beta$, (1.); also $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \beta$; aber auch $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \beta'$, (§. 6.); also $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \nu$ für $n > M[\beta, \beta']$, d. i. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \nu$ für $n > \alpha$.

Es braucht wohl nicht erst erinnert zu werden, daß dieses α nicht mit dem α in 1. einerley zu seyn braucht. M. f. §. 4. 4.

3. Sey $p=3$. Es ist $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \dots 4} = \frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \dots 4} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n}}{1 \dots 4}$. Aber $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{4\nu}{2}$ für $n > \gamma$, (2.), oder $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \dots 4} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \gamma$; aber $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n}}{1 \dots 4} < \frac{1}{2}\nu$ für $n > \gamma'$, (§. 6.); also $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \dots 4} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n}}{1 \dots 4} < \nu$ für $n > M[\gamma, \gamma']$, d. i. $\frac{1}{1 \dots 4} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \dots 4} < \nu$ für $n > \alpha$.

4. Es erhellet leicht, daß man auf diesem Wege immer weiter gehen und zu dem allgemeinen Beweise gelangen kann.

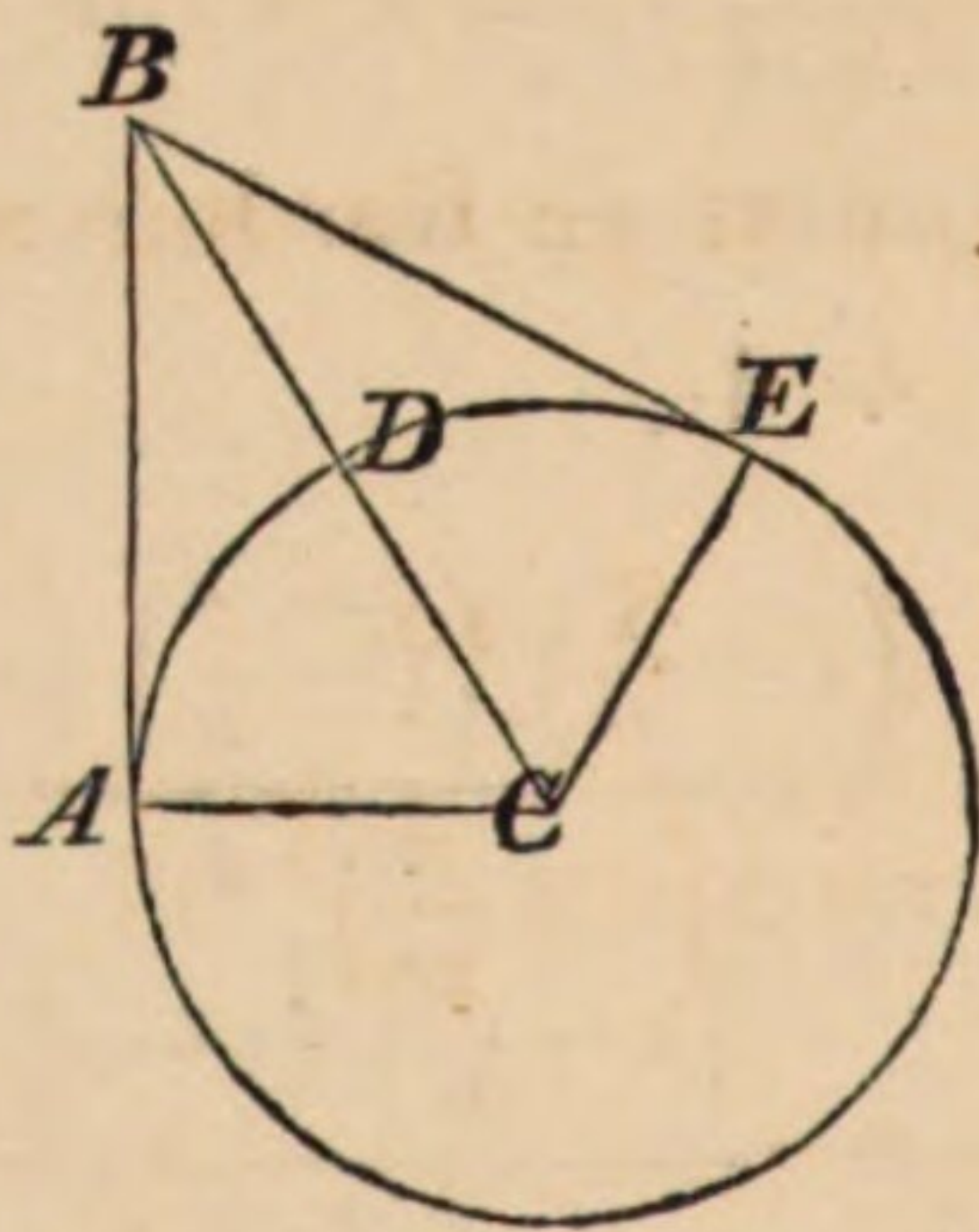
§. 8.

1. Unter allen Linien, welche einerley Endpunkte haben, ist die gerade Linie die kürzeste. Dies ist das erste Axiom in *Archimed's* Büchern über Kugel und Cylinder.

Da nun $2 \sin x = \text{Chord } 2x$, und nach diesem Axiom $\text{Chord } 2x < 2x$ ist; so ist $2 \sin x < 2x$, oder $\sin x < x$, der Bogen also immer größer als sein Sinus.

2. Wenn zwey Linien einerley Endpunkte haben, und die eine von der andern und der zwischen ihren Endpunkten gezogenen geraden Linie ganz eingeschlossen wird, so ist die eingeschlossene Linie die kürzere. Dies ist *Archimed's* zweytes Axiom in den Büchern über Kugel und Cylinder.

Sey AD ein Bogen unter $\frac{1}{2}\pi$ und AB seine Tangente, so lehrt die Geometrie, daß, wenn man die zweyte Tangente BE durch B an den Kreis zieht, $AB = BE$ und $AD = DE$ ist. Nun ist nach dem obigen Axiom $AB + BE > AD + DE$, also $2AB > 2AD$, $AB > AD$, d. i. $\text{Tg } x > x$, wenn $x < \frac{1}{2}\pi$.



Anmerkung. π bedeutet immer die halbe Peripherie oder den Bogen von 180° . Alle Bögen müssen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt gedacht werden. Der Halbmesser wird $= 1$ gesetzt.

§. 9.

Für $n > \frac{2x}{\pi}$ ist $\frac{x}{n} < \frac{1}{2}\pi$, also $\text{Tg } \frac{x}{n} > \frac{x}{n}$, (§. 8. 2.), und folglich $\frac{\sin \frac{x}{n}}{\text{Tg } \frac{x}{n}} < \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$,

oder $\cos \frac{x}{n} < \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$ für $n > \frac{2x}{\pi}$. Nun kann man aber, wenn $\nu < 1$ ist, n immer so

groß nehmen, daß $\cos \frac{x}{n} > 1 - \nu$ ist. Denn da $\nu < 1$ ist, so giebt es einen Bogen unter $\frac{1}{2}\pi$, dessen Cosinus $= 1 - \nu$ ist; dieser Bogen sey $= y$, oder $1 - \nu = \cos y$; nimmt man also $n > \frac{x}{y}$, so ist $\frac{x}{n} < y$, also $\cos \frac{x}{n} > \cos y$, oder $\cos \frac{x}{n} > 1 - \nu$ für $n > \frac{x}{y}$.

Es ist also jetzt $\cos \frac{x}{n} < \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$ für $n > \frac{2x}{\pi}$, und $\cos \frac{x}{n} > 1 - \nu$ für $n > \frac{x}{y}$; also $\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$

$> 1 - \nu$ für $n > M\left[\frac{2x}{\pi}, \frac{x}{y}\right]$, d. i. für $n > \frac{x}{y}$, da $\frac{x}{y} > \frac{2x}{\pi}$, weil $y < \frac{1}{2}\pi$; aber $\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$

< 1 , (§. 8. 1.); also $1 - \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} < \nu$ für $n > \frac{x}{y}$, wo nun offenbar ν nicht mehr < 1 zu

seyn braucht, sondern jede GröÙe bedeuten kann.

Setzt man jetzt $\frac{\nu}{x^p}$ für ν , so ist nach §. 5. für jedes positive ganze p , $1 - \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$
 $< \frac{\nu}{x^p}$ für $n > \alpha$, oder $\frac{x^p}{n^p} - \left(\sin \frac{x}{n}\right)^p < \frac{\nu}{n^p}$ für $n > \alpha$, oder $x^p - n^p \left(\sin \frac{x}{n}\right)^p < \nu$ für
 $n > \alpha$.

§. 10.

Da $\sin \text{vers } \frac{x}{n} = 1 - \cos \frac{x}{n} = 2 \left(\sin \frac{x}{2n}\right)^2$ ist, so ist $\frac{\sin \text{vers } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2n}\right)^2}{2 \cdot \frac{x}{2n}} =$

$\sin \frac{x}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}$; aber $\frac{x}{2n} > \sin \frac{x}{2n}$, (§. 8. 1.); also $\frac{\sin \text{vers } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} < \sin \frac{x}{2n}$, und noch mehr

$\frac{\sin \text{vers } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} < \frac{x}{2n}$. Sey nun $n > \frac{x^2}{2\nu}$, so ist $\frac{x}{2n} < \frac{\nu}{x}$; also $\frac{\sin \text{vers } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} < \frac{\nu}{x}$ für $n > \frac{x^2}{2\nu}$,

oder $\sin \text{vers } \frac{x}{n} < \frac{\nu}{n}$ für $n > \frac{x^2}{2\nu}$, $n \sin \text{vers } \frac{x}{n} < \nu$ für $n > \frac{x^2}{2\nu}$. Also noch mehr

$(n - p) \sin \text{vers } \frac{x}{n} < \nu$ für $n > \frac{x^2}{2\nu}$, oder $(n - p) \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) < \nu$ für $n > \frac{x^2}{2\nu}$; aber

$1 - \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p} < (n-p) \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$, nach dem in der Anmerkung zu diesem Paragraphen bewiesenen Satze; also $1 - \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p} < \nu$ für $n > \frac{x^2}{2\nu}$, d. i. für $n > \alpha$.

Anmerkung. Wenn $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch ist, so ist, für jedes ganze positive n , $n\left(1 - \frac{a}{b}\right) > 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Beweis.

Es ist $n\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{n(b-a)}{b} = \frac{nb^{n-1}(b-a)}{b^n}$, und $1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{b^n - a^n}{b^n} = \frac{(b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1})}{b^n}$; aber $a < b$; also $b^{n-1} = b^{n-1}$, $b^{n-2}a < b^{n-1}$, $b^{n-3}a^2 < b^{n-1}$, ..., $ba^{n-2} < b^{n-1}$, $a^{n-1} < b^{n-1}$; also $b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1} < nb^{n-1}$, und folglich $n\left(1 - \frac{a}{b}\right) > 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

§. 11.

Da nun $\frac{1}{1 \dots p} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)}{1 \dots p} < \nu$ für $n > \alpha'$, (§. 7.), $x^p - n^p \left(\sin \frac{x}{n}\right)^p < \nu$ für $n > \beta'$, (§. 9.), und $1 - \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p} < \nu$ für $n > \gamma'$ (§. 10.) ist; so ist auch

$$\frac{1}{1 \dots p} \cdot x^p \cdot 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)}{1 \dots p} n^p \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^p < \nu \text{ für } n > \delta', \text{ (§. 5.)}$$

Es ist also, wenn man für p nach und nach die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ... $2p-1$, und $\frac{\nu}{p}$ für ν setzt:

$$x - n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} < \frac{\nu}{p} \text{ für } n > \alpha'',$$

$$\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^3 < \frac{\nu}{p} \text{ für } n > \beta'',$$

$$\frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^5 < \frac{\nu}{p} \text{ für } n > \gamma'',$$

.....

$$\frac{x^{2p-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2p-2}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)} n^{2p-1} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-2p+1} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{2p-1} < \frac{\nu}{p} \text{ für } n > \pi''.$$

Also durch Addition:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \\ \vdots \\ + \frac{x^{2p-1}}{1 \cdot \dots (2p-1)} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \\ \vdots \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2p-2}{n}\right)}{1 \cdot \dots (2p-1)} n^{2p-1} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-2p+1} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^{2p-1} \end{array} \right\} < \nu$$

für $n > M[\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots \pi'']$, d. i. für $n > \alpha$.

§. 12.

Sey nun $2q+1$ eine ungerade Zahl $> 2x$, so ist

$$\begin{array}{ll} \frac{x^{2q+1}}{1 \cdot \dots (2q+1)} > \frac{2x^{2q+3}}{1 \cdot \dots (2q+3)}, & \text{oder } \frac{x^{2q+3}}{1 \cdot \dots (2q+3)} < \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2q+1}}{1 \cdot \dots (2q+1)}, \\ \frac{x^{2q+3}}{1 \cdot \dots (2q+3)} > \frac{2x^{2q+5}}{1 \cdot \dots (2q+5)}, & \frac{x^{2q+5}}{1 \cdot \dots (2q+5)} < \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2q+3}}{1 \cdot \dots (2q+3)}, \\ \frac{x^{2q+5}}{1 \cdot \dots (2q+5)} > \frac{2x^{2q+7}}{1 \cdot \dots (2q+7)}, & \frac{x^{2q+7}}{1 \cdot \dots (2q+7)} < \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2q+5}}{1 \cdot \dots (2q+5)}, \\ \text{u. f. f.} & \text{u. f. f.} \end{array}$$

so daß man also immer endlich auf einen Bruch $\frac{x^{2q+2r+1}}{1 \cdot \dots (2q+2r+1)} < \frac{\nu}{2}$ kommen wird.
(*Euccl. Elem. B. X. S. I.*) Es ist aber

$$\begin{array}{l} \frac{x^{2q+2r+1}}{1 \cdot \dots (2q+2r+1)} > \frac{2x^{2q+2r+3}}{1 \cdot \dots (2q+2r+3)}, \quad \frac{x^{2q+2r+3}}{1 \cdot \dots (2q+2r+3)} > \frac{2x^{2q+2r+5}}{1 \cdot \dots (2q+2r+5)}, \quad \text{u. f. f.} \\ \text{also } \frac{x^{2q+2r+1}}{1 \cdot \dots (2q+2r+1)} > \frac{x^{2q+2r+3}}{1 \cdot \dots (2q+2r+3)} + \frac{x^{2q+2r+5}}{1 \cdot \dots (2q+2r+5)} + \frac{x^{2q+2r+7}}{1 \cdot \dots (2q+2r+7)} + \dots, \\ \frac{2x^{2q+2r+1}}{1 \cdot \dots (2q+2r+1)} > \frac{x^{2q+2r+1}}{1 \cdot \dots (2q+2r+1)} + \frac{x^{2q+2r+3}}{1 \cdot \dots (2q+2r+3)} + \frac{x^{2q+2r+5}}{1 \cdot \dots (2q+2r+5)} + \dots, \text{ mithin} \\ \frac{x^{2q+2r+1}}{1 \cdot \dots (2q+2r+1)} + \frac{x^{2q+2r+3}}{1 \cdot \dots (2q+2r+3)} + \frac{x^{2q+2r+5}}{1 \cdot \dots (2q+2r+5)} + \dots < \nu. \end{array}$$

Da nun $\sin \frac{x}{n} < \frac{x}{n}$, also auch $\left(\sin \frac{x}{n}\right)^t < \frac{x^t}{n^t}$, oder $n^t \left(\sin \frac{x}{n}\right)^t < x^t$ ist; so ist

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{t-1}{n}\right)}{1 \dots t} n^t \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-t} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^t < \frac{x^t}{1 \dots t}, \text{ da } \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) < 1 \text{ und auch}$$

$$\cos \frac{x}{n} < 1.$$

Setzt man also für t nach und nach $2q + 2r + 1$, $2q + 2r + 3$, $2q + 2r + 5$, u. f. w.; so ist um so mehr, wenn man zur Abkürzung $2q + 2r + 1 = p'$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{x^{p'}}{1 \dots p'} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p'-1}{n}\right)}{1 \dots p'} n^{p'} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p'} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{p'} \\ & + \frac{x^{p'+2}}{1 \dots (p'+2)} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p'+1}{n}\right)}{1 \dots (p'+2)} n^{p'+2} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p'-2} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{p'+2} \\ & + \frac{x^{p'+4}}{1 \dots (p'+4)} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p'+3}{n}\right)}{1 \dots (p'+4)} n^{p'+4} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-p'-4} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{p'+4} \\ & \quad \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.} \end{aligned} \right\} < \nu.$$

§. 13.

Man kann also immer eine ungerade Zahl $p' = 2p + 1$ von solcher Beschaffenheit finden, daß

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{x^{2p+1}}{1 \dots (2p+1)} \\ & + \frac{x^{2p+3}}{1 \dots (2p+3)} \\ & + \frac{x^{2p+5}}{1 \dots (2p+5)} \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned} \right\} - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2p}{n}\right)}{1 \dots (2p+1)} n^{2p+1} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-2p-1} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{2p+1} \\ & + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2p+2}{n}\right)}{1 \dots (2p+3)} n^{2p+3} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-2p-3} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{2p+3} \\ & + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2p+4}{n}\right)}{1 \dots (2p+5)} n^{2p+5} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n-2p-5} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^{2p+5} \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned} \right\} < \frac{1}{2} \nu$$

denn in §. 12. kann $\frac{1}{2} \nu$ für ν gesetzt werden.

Hat man eine solche ungerade Zahl $2p + 1$ gefunden, so ist nun nach §. 11.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ + \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} \\ \vdots \\ + \frac{x^{2p-1}}{1 \cdot \dots \cdot (2p-1)} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot \dots \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \\ \vdots \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{2p-2}{n}\right)}{1 \cdot \dots \cdot (2p-1)} n^{2p-1} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-2p+1} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^{2p-1} \end{array} \right\} < \frac{1}{2} \nu$$

für $n > \alpha$, da für das dortige ν auch $\frac{1}{2} \nu$ gesetzt werden kann.

Hieraus folgt durch Addition, daß

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ + \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} \\ + \frac{x^7}{1 \cdot \dots \cdot 7} \\ + \text{u. f. f.} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot \dots \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \\ + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{6}{n}\right)}{1 \cdot \dots \cdot 7} n^7 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-7} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^7 \\ + \text{u. f. f.} \end{array} \right\} < \nu$$

für $n > \alpha$; also

$$\left\{ \begin{array}{l} x - n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \\ + \left\{ \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \right\} \\ + \left\{ \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot \dots \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \right\} \\ + \left\{ \frac{x^7}{1 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{6}{n}\right)}{1 \cdot \dots \cdot 7} n^7 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-7} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^7 \right\} \\ + \text{u. f. f.} \end{array} \right\} < \nu$$

für $n > \alpha$; also um so mehr

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ x - n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \right\} \\ & - \left\{ \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \right\} \\ & + \left\{ \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \right\} \\ & - \left\{ \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{6}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} n^7 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-7} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^7 \right\} \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned} \right\} < \nu$$

für $n > \alpha$. Also

$$\left\{ \begin{aligned} & x \\ & - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \\ & - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned} \right\} - \left\{ \begin{aligned} & n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \\ & - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^3 \\ & + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5} n^5 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^5 \\ & - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{6}{n}\right)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} n^7 \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n-7} \left(\sin \frac{x}{n} \right)^7 \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned} \right\} < \nu$$

d. i. $\left\{ x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right\} - \sin x < \nu$ für $n > \alpha$, ohne Rücksicht auf das Zeichen dieser Differenz, (§. 4. 1.).

§. 14.

Der Werth dieser Differenz, welche wir der Kürze wegen mit Δ bezeichnen wollen, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, kann also kleiner werden, als jede gegebene noch so kleine GröÙe, wenn man nur n gröÙer nimmt, als eine gewisse gegebene von ν abhängige GröÙe. Da aber Δ von n ganz unabhängig ist, so muß offenbar Δ an sich kleiner als jede gegebene GröÙe, d. i. $\Delta = 0$ seyn. Es ist also

$$\left\{ x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right\} - \sin x = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

für jedes positive x , da überhaupt die Bedeutung aller vorkommenden Zeichen in §. 4. 1. auf positive Größen eingeschränkt worden ist. Da aber $\sin(-x) = -\sin x$,

$$\text{und } (-x) = \frac{(-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(-x)^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{(-x)^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$= -x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots$$

$$= -\left\{x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots\right\}$$

$$\text{ist, so ist } \sin(-x) = (-x) - \frac{(-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(-x)^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{(-x)^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots;$$

also für jedes positive oder negative x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

§. 15.

Wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet, so ist bekanntlich

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

$$\text{Also } e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \left\{x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots\right\}$$

$$\text{d. i. } \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

B. Die Reihe für den Cosinus.

§. 16.

Es ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$(1-1)^{2n} = 0 = 1 - \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{2n}{1} + 1;$$

also, wenn man mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n$ dividirt:

$$\frac{1}{1 \cdot 2n} - \frac{1}{1 \cdot (2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot (2n-2) \cdot 1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot (2n-3) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2n-2)} - \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot (2n-1)} + \frac{1}{1 \cdot 2n} = 0.$$

§. 17.

Da $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$ ist, so kommt es, um $\cos x$ in eine Reihe zu entwickeln, bloß darauf an, eine Reihe Cx von solcher Beschaffenheit zu finden, daß $(Cx)^2 + (Sx)^2 = 1$ ist, wenn Sx die gefundene Reihe für den Sinus bezeichnet. Es ist aber

$$Sx = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot (2n-1)} \mp \dots; \text{ also}$$

$$(Sx)^2 = x^2 - \frac{x^4}{1 \cdot 3} + \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^8}{1 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot (2n-1)} \mp \dots$$

$$- \frac{x^4}{1 \cdot 3} + \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^8}{1 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot (2n-3) \cdot 1 \cdot 3} \mp \dots$$

$$+ \frac{x^6}{1 \cdot 5} - \frac{x^8}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot (2n-5) \cdot 1 \cdot 5} \mp \dots$$

$$- \frac{x^8}{1 \cdot 7} + \dots \pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot (2n-7) \cdot 1 \cdot 7} \mp \dots$$

$$\vdots$$

$$\pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (2n-3)} \mp \dots$$

$$\pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot (2n-1)} \mp \dots$$

$$= x^2$$

$$- x^4 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 3} \right\}$$

$$+ x^6 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 5} \right\}$$

$$- x^8 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 7 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 7} \right\}$$

$$\dots$$

$$\pm x^{2n} \left\{ \frac{1}{1 \cdot (2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot (2n-3) \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot (2n-5) \cdot 1 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (2n-3)} + \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot (2n-1)} \right\}$$

$$\mp \text{u. f. f.}$$

Aber (§. 16.):

$$0 = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$0 = \frac{1}{1 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 4}$$

$$0 = \frac{1}{1 \cdot 6} - \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 6}$$

$$0 = \frac{1}{1 \cdot 8} - \frac{1}{1 \cdot 7 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6} - \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 8}$$

$$\text{u. f. f.} \qquad \qquad \qquad \text{u. f. f.}$$

Also

$$o = x^2$$

$$-x^2 \left\{ \frac{1}{1..2} + \frac{1}{1..2} \right\}$$

$$-x^4 \left\{ \frac{1}{1..3..1} + \frac{1}{1..1..3} \right\}$$

$$+x^4 \left\{ \frac{1}{1..4..1} + \frac{1}{1..2..1..2} + \frac{1}{1..4} \right\}$$

$$+x^6 \left\{ \frac{1}{1..5..1} + \frac{1}{1..3..1..3} + \frac{1}{1..1..5} \right\}$$

$$-x^6 \left\{ \frac{1}{1..6..1} + \frac{1}{1..4..1..2} + \frac{1}{1..2..1..4} + \frac{1}{1..6} \right\}$$

$$-x^8 \left\{ \frac{1}{1..7..1} + \frac{1}{1..5..1..3} + \frac{1}{1..3..1..5} + \frac{1}{1..1..7} \right\}$$

u. f. f. u. f. f.

$$\pm x^{2n} \left\{ \frac{1}{1..(2n-1)..1} + \frac{1}{1..(2n-3)..1..3} + \frac{1}{1..(2n-5)..1..5} + \dots + \frac{1}{1..3..1..(2n-3)} + \frac{1}{1..1..(2n-1)} \right\}$$

$$\mp x^{2n} \left\{ \frac{1}{1..2n} + \frac{1}{1..(2n-2)..1..2} + \frac{1}{1..(2n-4)..1..4} + \dots + \frac{1}{1..4..1..(2n-4)} + \frac{1}{1..2..1..(2n-2)} + \frac{1}{1..2n} \right\}$$

$\mp$ u. f. f.

oder

$$o = (Sx)^2 - x^2 \left\{ \frac{1}{1..2} + \frac{1}{1..2} \right\}$$

$$+x^4 \left\{ \frac{1}{1..4} + \frac{1}{1..2..1..2} + \frac{1}{1..4} \right\}$$

$$-x^6 \left\{ \frac{1}{1..6} + \frac{1}{1..4..1..2} + \frac{1}{1..2..1..4} + \frac{1}{1..6} \right\}$$

u. f. f. u. f. f.

$$\mp x^{2n} \left\{ \frac{1}{1..2n} + \frac{1}{1..(2n-2)..1..2} + \frac{1}{1..(2n-4)..1..4} + \dots + \frac{1}{1..2..1..(2n-2)} + \frac{1}{1..2n} \right\}$$

$\pm$ u. f. f.

Also

$$I = (Sx)^2 + I$$

$$-x^2 \left\{ \frac{1}{1..2} + \frac{1}{1..2} \right\}$$

$$+x^4 \left\{ \frac{1}{1..4} + \frac{1}{1..2..1..2} + \frac{1}{1..4} \right\}$$

$$-x^6 \left\{ \frac{1}{1..6} + \frac{1}{1..4..1..2} + \frac{1}{1..2..1..4} + \frac{1}{1..6} \right\}$$

u. f. f. u. f. f.

$$\begin{aligned}
& \mp x^{2n} \left\{ \frac{1}{1 \dots 2n} + \frac{1}{1 \dots (2n-2) \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \dots (2n-4) \cdot 1 \dots 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \dots (2n-2)} + \frac{1}{1 \dots 2n} \right\} \\
& \pm \text{u. f. f.} \\
& = (Sx)^2 + 1 \\
& \quad - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - 1 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} \\
& \quad + \frac{x^4}{1 \dots 4} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + 1 \cdot \frac{x^4}{1 \dots 4} \\
& \quad - \frac{x^6}{1 \dots 6} - \frac{x^4}{1 \dots 4} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^4}{1 \dots 4} - 1 \cdot \frac{x^6}{1 \dots 6} \\
& \quad \quad \text{u. f. f.} \quad \quad \text{u. f. f.} \\
& \quad \mp \frac{x^{2n}}{1 \dots 2n} \mp \frac{x^{2n-2}}{1 \dots (2n-2)} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} \mp \frac{x^{2n-4}}{1 \dots (2n-4)} \cdot \frac{x^4}{1 \dots 4} \mp \frac{x^{2n-6}}{1 \dots (2n-6)} \cdot \frac{x^6}{1 \dots 6} \mp \text{u. f. f.} \\
& \quad \quad \text{u. f. f.} \quad \quad \text{u. f. f.} \\
& = (Sx)^2 + 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \dots 4} - \frac{x^6}{1 \dots 6} + \dots \\
& \quad - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \dots 4} - \frac{x^6}{1 \dots 6} + \dots \right\} \\
& \quad + \frac{x^4}{1 \dots 4} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \dots 4} - \frac{x^6}{1 \dots 6} + \dots \right\} \\
& \quad - \frac{x^6}{1 \dots 6} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \dots 4} + \frac{x^6}{1 \dots 6} + \dots \right\} \\
& \quad + \text{u. f. f.} \\
& = (Sx)^2 + \left\{ 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \dots 4} - \frac{x^6}{1 \dots 6} + \dots \right\}^2 \\
& = (Sx)^2 + (Cx)^2.
\end{aligned}$$

Es ist also $\sin x^2 + \cos x^2 = (Sx)^2 + (Cx)^2$; aber $\sin x = Sx$, also $\cos x^2 = Cx^2$, und folglich $\cos x = \pm Cx$. Da aber $\cos x = 1$ für $x=0$, und $-Cx = -1$ für $x=0$; so kann $\cos x$ nicht $= -Cx$ seyn, sondern es ist $\cos x = Cx = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \dots 4} - \frac{x^6}{1 \dots 6} + \text{u. f. f.}$

§. 18.

Man könnte diese Reihe für den Cosinus ganz auf ähnliche Art wie die Reihe für den Sinus beweisen; auch könnte sie durch die Methode der unbestimmten Coefficienten entwickelt werden. Wir haben jedoch die obige Darstellung vorgezogen. Noch bemerken wir folgende bekannte Entwicklung:

$$\text{Es ist } \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad (\S. 15.); \text{ also } \cos x^2 = 1 - \sin x^2 =$$

$$1 - \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}^2 = 1 + \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 2 + e^{-2x\sqrt{-1}}}{4} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 2 + e^{-2x\sqrt{-1}}}{4} =$$

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 2 \cdot e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}}{4} = \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \right\}^2.$$

$$\text{Also } \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}.$$

Nach §. 15. ist aber

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2 \left\{ 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \dots \right\}, \text{ also}$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \dots$$

§. 19.

Die höhere Analysis, vorzüglich die Integralrechnung, bedient sich fortwährend trigonometrischer Linien, deren Bögen imaginär sind. Der Sinus eines imaginären Bogens i ist aber nichts anderes als die Reihe

$$i - \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{i^5}{1 \cdot 5} - \frac{i^7}{1 \cdot 7} + \dots = Si,$$

und sein Cosinus die Reihe

$$1 - \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{i^4}{1 \cdot 4} - \frac{i^6}{1 \cdot 6} + \dots = Ci.$$

$\sin i$ und $\cos i$ sind in diesem Falle eigentlich bloß abkürzende Bezeichnungen der Reihen Si und Ci . Jedoch gelten für diese Sinus und Cosinus alle Relationen, welche in der Trigonometrie für die Sinus und Cosinus reeller Bögen bewiesen werden. Denn diese Relationen gelten für die Reihen Si und Ci , wenn i reell ist; da aber in diesem Falle die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von i auf die Rechnung offenbar gar keinen Einfluß hat, so müssen diese Relationen alle auch gelten, wenn i imaginär ist. Ähnliche Bemerkungen sind über die übrigen trigonometrischen Linien imaginärer Bögen zu machen.

C. Die Reihe für den Sinus vers.

§. 20.

$\sin \text{vers } x = 1 - \cos x$; also

$$\sin \text{vers } x = \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^4}{1 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot 6} - \frac{x^8}{1 \cdot 8} + \text{u. s. f. (§. 17.)}$$

D. Die Reihe für die Cotangente.

§. 21.

Da $\cos \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos x)$ und $2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x = \sin x$ ist, so ist

$$\frac{\cos \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x} = \frac{1 + \cos x}{2 \sin x}, \text{ oder } \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} x = \frac{1 + \cos x}{2 \sin x}. \text{ Also}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} x &= \frac{2 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 8} - \dots}{2 \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 7} + \frac{x^9}{1 \cdot 9} - \dots \right)} \\ &= \frac{2 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 8} - \dots}{2x \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 5} - \frac{x^6}{1 \cdot 7} + \frac{x^8}{1 \cdot 9} - \dots \right)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{x^4}{2 \cdot 1 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 1 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 1 \cdot 8} - \dots}{x \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 5} - \frac{x^6}{1 \cdot 7} + \frac{x^8}{1 \cdot 9} - \dots \right)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{P}{Q}. \end{aligned}$$

Um den Bruch $\frac{P}{Q}$ in eine Reihe zu entwickeln, setze man $\frac{P}{Q} = \mathfrak{A} + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \dots$, woraus sich, wenn man mit Q multiplicirt, folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{x^4}{2 \cdot 1 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 1 \cdot 6} + \text{u. f. f.} &= \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{A}x^2}{1 \cdot 3} + \frac{\mathfrak{A}x^4}{1 \cdot 5} - \frac{\mathfrak{A}x^6}{1 \cdot 7} + \frac{\mathfrak{A}x^8}{1 \cdot 9} - \frac{\mathfrak{A}x^{10}}{1 \cdot 11} + \dots \\ &+ Ax^2 - \frac{Ax^4}{1 \cdot 3} + \frac{Ax^6}{1 \cdot 5} - \frac{Ax^8}{1 \cdot 7} + \frac{Ax^{10}}{1 \cdot 9} - \dots \\ &+ Bx^4 - \frac{Bx^6}{1 \cdot 3} + \frac{Bx^8}{1 \cdot 5} - \frac{Bx^{10}}{1 \cdot 7} + \dots \\ &+ Cx^6 - \frac{Cx^8}{1 \cdot 3} + \frac{Cx^{10}}{1 \cdot 5} - \dots \\ &+ Dx^8 - \frac{Dx^{10}}{1 \cdot 3} + \dots \\ &+ Ex^{10} - \dots \end{aligned}$$

Hieraus erhält man zur Bestimmung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{H} = 1$$

$$A - \frac{1}{1 \dots 3} = -\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2}$$

$$B - \frac{A}{1 \dots 3} + \frac{1}{1 \dots 5} = \frac{1}{2 \cdot 1 \dots 4}$$

$$C - \frac{B}{1 \dots 3} + \frac{A}{1 \dots 5} - \frac{1}{1 \dots 7} = -\frac{1}{2 \cdot 1 \dots 6}$$

$$D - \frac{C}{1 \dots 3} + \frac{B}{1 \dots 5} - \frac{A}{1 \dots 7} + \frac{1}{1 \dots 9} = \frac{1}{2 \cdot 1 \dots 8}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

$$0 = A + \frac{1}{2 \cdot 1 \dots 3}$$

$$0 = B - \frac{A}{1 \dots 3} - \frac{3}{2 \cdot 1 \dots 5}$$

$$0 = C - \frac{B}{1 \dots 3} + \frac{A}{1 \dots 5} + \frac{5}{2 \cdot 1 \dots 7}$$

$$0 = D - \frac{C}{1 \dots 3} + \frac{B}{1 \dots 5} - \frac{A}{1 \dots 7} - \frac{7}{2 \cdot 1 \dots 9}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

$$0 = (-A) - \frac{1}{2 \cdot 1 \dots 3}$$

$$0 = (-B) - \frac{(-A)}{1 \dots 3} + \frac{3}{2 \cdot 1 \dots 5}$$

$$0 = (-C) - \frac{(-B)}{1 \dots 3} + \frac{(-A)}{1 \dots 5} - \frac{5}{2 \cdot 1 \dots 7}$$

$$0 = (-D) - \frac{(-C)}{1 \dots 3} + \frac{(-B)}{1 \dots 5} - \frac{(-A)}{1 \dots 7} + \frac{7}{2 \cdot 1 \dots 9}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

Die Summation der positiven ganzen Potenzen der natürlichen Zahlen führt, wie in der Differenzenrechnung gezeigt wird, auf folgende Gleichungen für die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. f. f., welche, mit gewissen Zahlen multiplicirt, in die Summe dieser Potenzen als beständige Coefficienten eingehen:

$$0 = \alpha - \frac{1}{2 \cdot 1 \dots 3}$$

$$0 = \beta + \frac{\alpha}{1 \dots 3} - \frac{3}{2 \cdot 1 \dots 5}$$

$$0 = \gamma + \frac{\beta}{1 \dots 3} + \frac{\alpha}{1 \dots 5} - \frac{5}{2 \cdot 1 \dots 7}$$

$$0 = \delta + \frac{\gamma}{1 \dots 3} + \frac{\beta}{1 \dots 5} + \frac{\alpha}{1 \dots 7} - \frac{7}{2 \cdot 1 \dots 9}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

$$0 = \alpha - \frac{1}{2 \cdot 1 \dots 3}$$

$$0 = (-\beta) - \frac{\alpha}{1 \dots 3} + \frac{3}{2 \cdot 1 \dots 5}$$

$$0 = \gamma - \frac{(-\beta)}{1 \dots 3} + \frac{\alpha}{1 \dots 5} - \frac{5}{2 \cdot 1 \dots 7}$$

$$0 = (-\delta) - \frac{\gamma}{1 \dots 3} + \frac{(-\beta)}{1 \dots 5} - \frac{\alpha}{1 \dots 7} + \frac{7}{2 \cdot 1 \dots 9}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

Die schon erwähnten constanten Coefficienten in der Summe der Reihe $1^n + 2^n + 3^n + \dots + x^n$ sind $1 \cdot 2 \cdot \alpha = \overset{1}{\mathfrak{B}}$, $-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \beta = \overset{2}{\mathfrak{B}}$, $1 \cdot 2 \dots 6 \cdot \gamma = \overset{3}{\mathfrak{B}}$, $-1 \cdot 2 \dots 8 \cdot \delta = \overset{4}{\mathfrak{B}}$, $1 \cdot 2 \dots 10 \cdot \varepsilon = \overset{5}{\mathfrak{B}}$, u. f. w., und werden, nach ihrem Erfinder *Jacob Bernoulli*, die Bernoulli'schen Zahlen genannt. Diese Zahlen sind in der ganzen höhern Mathematik von der größten Wichtigkeit, und erscheinen besonders bey Summirungen unendlicher Reihen sehr häufig.

Vergleicht man die letzten Gleichungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. f. f., mit den Gleichungen für $-A, -B, -C, -D$, u. f. f., so erhellet leicht, daß $-A = \alpha$, $-B = -\beta$, $-C = \gamma$, $-D = -\delta$, $-E = \varepsilon$, u. f. f.; also $-1 \cdot 2 A = 1 \cdot 2 \cdot \alpha = \overset{1}{\mathfrak{B}}$, $-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 B = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \beta = \overset{2}{\mathfrak{B}}$, $-1 \cdot 2 \dots 6 C = 1 \cdot 2 \dots 6 \cdot \gamma = \overset{3}{\mathfrak{B}}$, $-1 \cdot 2 \dots 8 D = -1 \cdot 2 \dots 8 \cdot \delta = \overset{4}{\mathfrak{B}}$, $-1 \cdot 2 \dots 10 E = 1 \cdot 2 \dots 10 \cdot \varepsilon = \overset{5}{\mathfrak{B}}$, u. f. w.; also $A = -\frac{\overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2}$, $B = -\frac{\overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4}$, $C = -\frac{\overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6}$, $D = -\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 8}$, $E = -\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 10}$, u. f. w. Also

$$\frac{1}{2} \text{Cotg} \frac{1}{2} x = \frac{1}{x} - \frac{\overset{1}{\mathfrak{B}}x}{1 \cdot 2} - \frac{\overset{2}{\mathfrak{B}}x^3}{1 \dots 4} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{B}}x^5}{1 \dots 6} - \frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}x^7}{1 \dots 8} - \text{u. f. f.}$$

$$\text{Cotg} \frac{1}{2} x = \frac{2}{x} - \frac{2\overset{1}{\mathfrak{B}}x}{1 \cdot 2} - \frac{2\overset{2}{\mathfrak{B}}x^3}{1 \dots 4} - \frac{2\overset{3}{\mathfrak{B}}x^5}{1 \dots 6} - \frac{2\overset{4}{\mathfrak{B}}x^7}{1 \dots 8} - \text{u. f. f.}$$

oder, wenn man $2x$ für x setzt:

$$\text{Cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}x}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 \cdot \overset{2}{\mathfrak{B}}x^3}{1 \dots 4} - \frac{2^6 \cdot \overset{3}{\mathfrak{B}}x^5}{1 \dots 6} - \frac{2^8 \cdot \overset{4}{\mathfrak{B}}x^7}{1 \dots 8} - \text{u. f. f.}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{4 \cdot \mathfrak{B}x}{1 \cdot 2} - \frac{4^2 \cdot \mathfrak{B}x^3}{1 \cdot 4} - \frac{4^3 \cdot \mathfrak{B}x^5}{1 \cdot 6} - \frac{4^4 \cdot \mathfrak{B}x^7}{1 \cdot 8} - \text{u. f. f.}$$

$\mathfrak{B}^1$ ist die erste, $\mathfrak{B}^2$ die zweyte, $\mathfrak{B}^3$ die dritte, $\mathfrak{B}^4$ die vierte, u. f. w., Bernoulli'sche Zahl,

§. 22.

Da $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ ist, so ist $\cotg x =$

$$\frac{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) \cdot \sqrt{-1}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1) \cdot \sqrt{-1}}{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}.$$

E. Die Reihe für die Tangente.

§. 23.

Es ist $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

also $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{\sin x}{2 \cos x}$, d. i.

$\cotg 2x = \frac{1}{2} \cotg x - \frac{1}{2} \text{Tg } x$, $\text{Tg } x = \cotg x - 2 \cotg 2x$.

Aber $\cotg x = \frac{1}{x} - \frac{4 \cdot \mathfrak{B}x}{1 \cdot 2} - \frac{4^2 \cdot \mathfrak{B}x^3}{1 \cdot 4} - \frac{4^3 \cdot \mathfrak{B}x^5}{1 \cdot 6} - \frac{4^4 \cdot \mathfrak{B}x^7}{1 \cdot 8} - \text{u. f. f.}$

$2 \cotg 2x = \frac{1}{x} - \frac{4^2 \cdot \mathfrak{B}x}{1 \cdot 2} - \frac{4^4 \cdot \mathfrak{B}x^3}{1 \cdot 4} - \frac{4^6 \cdot \mathfrak{B}x^5}{1 \cdot 6} - \frac{4^8 \cdot \mathfrak{B}x^7}{1 \cdot 8} - \text{u. f. f.}$

Also $\text{Tg } x = \frac{(4^2 - 4) \mathfrak{B}x}{1 \cdot 2} + \frac{(4^4 - 4^2) \mathfrak{B}x^3}{1 \cdot 4} + \frac{(4^6 - 4^3) \mathfrak{B}x^5}{1 \cdot 6} + \frac{(4^8 - 4^4) \mathfrak{B}x^7}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.}$

$= \frac{4(4-1) \mathfrak{B}x}{1 \cdot 2} + \frac{4^2 \cdot (4^2-1) \mathfrak{B}x^3}{1 \cdot 4} + \frac{4^3 \cdot (4^3-1) \mathfrak{B}x^5}{1 \cdot 6} + \frac{4^4 \cdot (4^4-1) \mathfrak{B}x^7}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.}$

$= \frac{2^2 \cdot (2^2-1) \mathfrak{B}x}{1 \cdot 2} + \frac{2^4 \cdot (2^4-1) \mathfrak{B}x^3}{1 \cdot 4} + \frac{2^6 \cdot (2^6-1) \mathfrak{B}x^5}{1 \cdot 6} + \frac{2^8 \cdot (2^8-1) \mathfrak{B}x^7}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.}$

§. 24.

Da $\text{Tg } x = \frac{1}{\cotg x}$, so ist $\text{Tg } x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}.$

F. Die Reihe für die Cofecante.

§. 25.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \operatorname{Tg} \frac{1}{2} x + \operatorname{Cotg} x &= \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} + \frac{\cos \frac{1}{2} x^2 - \sin \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x} = \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} + \frac{\cos \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x} - \frac{\sin \frac{1}{2} x}{2 \cos \frac{1}{2} x} = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{2 \cos \frac{1}{2} x} + \frac{\cos \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x} = \frac{\sin \frac{1}{2} x^2 + \cos \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x} \\ &= \frac{1}{\sin x} = \operatorname{Cofec} x. \text{ Nun ist} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} x &= \frac{2(2^2-1) \frac{1}{2} x}{1 \cdot 2} + \frac{2(2^4-1) \frac{2}{2} x^3}{1 \cdot 4} + \frac{2(2^6-1) \frac{3}{2} x^5}{1 \cdot 6} + \frac{2(2^8-1) \frac{4}{2} x^7}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.} \\ \operatorname{Cotg} x &= \frac{1}{x} - \frac{2^2 \cdot \frac{1}{2} x}{1 \cdot 2} + \frac{2^4 \cdot \frac{2}{2} x^3}{1 \cdot 4} - \frac{2^6 \cdot \frac{3}{2} x^5}{1 \cdot 6} + \frac{2^8 \cdot \frac{4}{2} x^7}{1 \cdot 8} - \text{u. f. f.} \\ \text{Also } \operatorname{Cofec} x &= \frac{1}{x} + \frac{(2^2-2) \frac{1}{2} x}{1 \cdot 2} + \frac{(2^4-2) \frac{2}{2} x^3}{1 \cdot 4} + \frac{(2^6-2) \frac{3}{2} x^5}{1 \cdot 6} + \frac{(2^8-2) \frac{4}{2} x^7}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2(2-1) \frac{1}{2} x}{1 \cdot 2} + \frac{2(2^3-1) \frac{2}{2} x^3}{1 \cdot 4} + \frac{2(2^5-1) \frac{3}{2} x^5}{1 \cdot 6} + \frac{2(2^7-1) \frac{4}{2} x^7}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

§. 26.

$$\text{Da } \operatorname{Cofec} x = \frac{1}{\sin x}, \text{ so ist } \operatorname{Cofec} x = \frac{2\sqrt{-1}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}.$$

G. Die Reihe für die Secante.

§. 27.

$$\text{Es ist } \operatorname{Sec} x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 8} - \dots}$$

Um diesen Bruch in eine Reihe zu entwickeln, setze man ihn $= \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6 + \varepsilon x^8 + \dots$, so erhält man, wenn man mit dem Nenner multiplicirt:

$$\begin{aligned}
 1 &= \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6 + \varepsilon x^8 + \dots \\
 &\quad - \frac{\alpha x^2}{1 \cdot 2} - \frac{\beta x^4}{1 \cdot 2} - \frac{\gamma x^6}{1 \cdot 2} - \frac{\delta x^8}{1 \cdot 2} - \dots \\
 &\quad + \frac{\alpha x^4}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\beta x^6}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\gamma x^8}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\
 &\quad - \frac{\alpha x^6}{1 \cdot 3 \cdot 6} - \frac{\beta x^8}{1 \cdot 3 \cdot 6} - \dots \\
 &\quad + \frac{\alpha x^8}{1 \cdot 3 \cdot 8} + \dots
 \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$\alpha = 1$$

$$0 = \beta - \frac{\alpha}{1 \cdot 2}$$

$$0 = \gamma - \frac{\beta}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha}{1 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$0 = \delta - \frac{\gamma}{1 \cdot 2} + \frac{\beta}{1 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\alpha}{1 \cdot 3 \cdot 6}$$

$$0 = \varepsilon - \frac{\delta}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma}{1 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\beta}{1 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{\alpha}{1 \cdot 3 \cdot 8}$$

u. f. f.

u. f. f.

$$\text{Also } \sec x = 1 + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6 + \varepsilon x^8 + \dots$$

Die Secante läßt sich durch die Bernoulli'schen Zahlen nicht ausdrücken.

Diese Entwicklung der Secante, und eben so die obige Entwicklung der Cotangente in eine Reihe, beruhen scheinbar auf der Voraussetzung, daß sich diese trigonometrischen Linien in Reihen entwickeln lassen, welche nach den positiven ganzen Potenzen des Bogens fortschreiten; bey näherer Betrachtung wird aber leicht erhellen, daß diese Voraussetzung hier durch die Entwicklung selbst vollständig gerechtfertigt wird.

§. 28.

$$\text{Da } \sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ so ist } \sec x = \frac{2}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}.$$

Zweyter Abschnitt.

Ueber die Zerfällung der transcendenten Functionen $e^x \pm e^{-x}$,
 $e^x \pm 2 \cos \varphi + e^{-x}$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, u. f. f., in Factoren.

§. 29.

Eine Zusammenstellung und Kritik der verschiedenen Beweise, welche *Johann Bernoulli*, ^{e)} *Euler*, ^{f)} Herr Professor *L'Huilier*, ^{g)} und Herr Professor *Lacroix* ^{h)} für die Zerlegung der obigen transcendenten Functionen in Factoren gegeben haben, würde hier zwar nicht am unrechten Orte seyn; diese Untersuchung würde mich aber zu weit von meinem eigentlichen Zwecke entfernen, indem gegenwärtige Abhandlung vorzüglich der Darlegung eines von jenen gänzlich verschiedenen Beweises gewidmet seyn soll, welcher bloß auf den gewöhnlichen Begriffen von den unendlichen Reihen beruhet. Gegen den von *Bernoulli* zuerst gegebenen Beweis hat schon Herr Hofrath *Pfaff* in Halle mehrere sehr treffende Erinnerungen gemacht. ⁱ⁾

§. 30.

Der ganzen folgenden Untersuchung liegt die Summation der Reihe

$$1 - 2^{2n} + 3^{2n} - 4^{2n} + \dots = \sum \pm y^{2n} \quad \text{k)}$$

zum Grunde, auf welche wir also zunächst unser Augenmerk werden zu richten haben.

e) *Joh. Bernoulli Opera omnia*. T. IV. Nr. 152. *Johann Bernoulli* hat an diesem Orte nur die Zerfällung von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ bewiesen, woraus sich aber die Zerlegung der Exponentialfunctionen leicht ableiten läßt. Denselben Beweis giebt *Euler* in der Abhandlung: *De summis serierum reciprocarum*, in *Comment. Petrop.* T. VI. 1734 — 1735. p. 124., ohne etwas von *Bernoulli's* Verfahren zu willen, da der vierte Theil von dessen Werken, welcher die ungedruckten Abhandlungen enthält, erst 1742 erschienen ist. Bemerkenswerth ist es, daß dieser Beweis im ersten Bande der *Annales des Mathématiques pures et appliquées*, par *Gergonne*, von dem Herrn Herausgeber als eine neue Erfindung vorgetragen wird. M. f. über diesen Beweis noch *Kästner's Analysis des Unendlichen*, 3te Aufl. Gött. 1799. S. 364. ff., und *Klügel's Analytische Trigonometrie*, Braunschw. 1770. S. 130. ff.

f) *Introd. in Anal. Inf.* T. I. Cap. IX. §. 155. 199. Cap. XI.

g) *Sur la décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux puissances à exposans quelconques de la base des logarithmes hyperboliques; dans le but de dégager cette décomposition de toute idée de l'infini.* Par S. L'Huilier. In *Mém. de Berlin*, 1788. 1789. p. 326. — *Eiusd. Principiorum calculi diff. et int. expositio elementaris*, Cap. VIII. p. 119.

h) *Traité du Calcul diff. et du Calcul int.* T. III. (*Traité des différences et des series.*) Edit. 2. Paris 1819. p. 439.

i) *Versuch einer neuen Summationsmethode* u. f. w. Berlin 1780. 8. S. 87 — 90.

k) Es sey mir verstattet, mit Herrn Hofrath *Pfaff* (a. a. O. S. 5.) durch $\sum N$ die Summe einer unendlichen Rei-

I. Sey $V = \frac{1}{1+e^x}$, wo e wie gewöhnlich die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Also

$$V = 1 - e^x + e^{2x} - e^{3x} + e^{4x} - \text{u. f. f.}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{u. f. f.} \right)$$

$$+ \left(1 + \frac{2x}{1} + \frac{2^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^4 \cdot x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{u. f. f.} \right)$$

$$- \left(1 + \frac{3x}{1} + \frac{3^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{3^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3^4 \cdot x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{u. f. f.} \right)$$

$$+ \left(1 + \frac{4x}{1} + \frac{4^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{4^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4^4 \cdot x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{u. f. f.} \right)$$

$$- \text{u. f. f.}$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{u. f. f.}$$

$$- \frac{x}{1} (1 - 2 + 3 - 4 + \text{u. f. f.})$$

$$- \frac{x^2}{1 \cdot 2} (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{u. f. f.})$$

$$- \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{u. f. f.})$$

$$- \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{u. f. f.})$$

$$- \text{u. f. f.}$$

$$= \Sigma \pm y^0 - \frac{x}{1} \Sigma \pm y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Sigma \pm y^2 - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \pm y^3 - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Sigma \pm y^4 - \text{u. f. f.}$$

woraus leicht folgt:

$$V' = \frac{1}{1+e^{-x}} = \Sigma \pm y^0 + \frac{x}{1} \Sigma \pm y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Sigma \pm y^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \pm y^3 - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Sigma \pm y^4 + \text{u. f. f.}$$

$$\text{Aber } 1 - V = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} = V'.$$

$$\text{Also } 1 - \Sigma \pm y^0 + \frac{x}{1} \Sigma \pm y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Sigma \pm y^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \pm y^3 - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Sigma \pm y^4 + \text{u. f. f.}$$

$$= \Sigma \pm y^0 + \frac{x}{1} \Sigma \pm y - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Sigma \pm y^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \pm y^3 - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Sigma \pm y^4 + \text{u. f. f.}$$

he mit lauter bejaheten Gliedern, deren Terminus generalis N ist, zu bezeichnen. Unter $\Sigma \pm N$ aber verstehe man die Summe einer unendlichen Reihe mit abwechselnden Zeichen, deren erstes Glied bejahet, das andere verneint ist.

$$\text{Also } 1 - \sum \pm y^0 = \sum \pm y^0; \text{ oder } \sum \pm y^0 = \frac{1}{2};$$

$$\sum \pm y^2 = -\sum \pm y^2; \quad \sum \pm y^2 = 0;$$

$$\sum \pm y^4 = -\sum \pm y^4; \quad \sum \pm y^4 = 0;$$

$$\sum \pm y^6 = -\sum \pm y^6; \quad \sum \pm y^6 = 0;$$

$$\text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.}$$

$$\text{Also allgemein } \sum \pm y^{2n} = \frac{1}{2} \text{ für } n = 0, \text{ und } \sum \pm y^{2n} = 0 \text{ für } n > 0. \text{ 1)}$$

II. Ein anderer Beweis dieses Satzes, welcher bloß auf den trigonometrischen Reihen beruht, ließe sich vielleicht so führen:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)$$

$$\alpha = nx, \quad \beta = x,$$

$$\cos(n + 1)x = 2 \cos nx \cdot \cos x - \cos(n - 1)x.$$

$$\text{Also } \cos x = \cos x$$

$$- \cos 2x = -2 \cos x \cdot \cos x + 1$$

$$\cos 3x = 2 \cos 2x \cdot \cos x - \cos x$$

$$- \cos 4x = -2 \cos 3x \cdot \cos x + \cos 2x$$

$$\cos 5x = 2 \cos 4x \cdot \cos x - \cos 3x$$

$$- \cos 6x = -2 \cos 5x \cdot \cos x + \cos 4x$$

$$\text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.}$$

Also $S = \cos x - 2S \cdot \cos x + 1 - S$, wenn man $\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \text{u. f. f.} = S$ setzt. Also $2S + 2S \cos x = 1 + \cos x$, oder $2S(1 + \cos x) = 1 + \cos x$,

$$2S = 1, \quad S = \frac{1}{2}. \text{ Aber nach §. 17.:}$$

$$S = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 8} - \text{u. f. f.}$$

$$- 1 + \frac{2^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 \cdot x^4}{1 \cdot 4} + \frac{2^6 \cdot x^6}{1 \cdot 6} - \frac{2^8 \cdot x^8}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.}$$

$$+ 1 - \frac{3^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{3^4 \cdot x^4}{1 \cdot 4} - \frac{3^6 \cdot x^6}{1 \cdot 6} + \frac{3^8 \cdot x^8}{1 \cdot 8} - \text{u. f. f.}$$

$$- 1 + \frac{4^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} - \frac{4^4 \cdot x^4}{1 \cdot 4} + \frac{4^6 \cdot x^6}{1 \cdot 6} - \frac{4^8 \cdot x^8}{1 \cdot 8} + \text{u. f. f.}$$

$$\text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.}$$

1) Den hier vorgetragenen einfachen Beweis dieses merkwürdigen Satzes giebt Klügel im *mathematischen Wörterbuche*, III. Art. Potenz, S. 874.

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \\
 &\quad - (1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} \\
 &\quad + (1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots) \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 3 \cdot 4} \\
 &\quad - (1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \dots) \cdot \frac{x^6}{1 \cdot 5 \cdot 6} \\
 &\quad + (1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + \dots) \cdot \frac{x^8}{1 \cdot 7 \cdot 8} \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \\ &\quad - (1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad + (1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots) \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\quad - (1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \dots) \cdot \frac{x^6}{1 \cdot 5 \cdot 6} \\ &\quad + (1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + \dots) \cdot \frac{x^8}{1 \cdot 7 \cdot 8} \\ &\quad - \dots \end{aligned}} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also } 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots &= \frac{1}{2} \\
 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots &= 0 \\
 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots &= 0 \\
 1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \dots &= 0 \\
 \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

Auf ähnliche Art lassen sich auch die Reihen der ungeraden Potenzen:

$$\begin{aligned}
 &1 - 2 + 3 - 4 + \dots \\
 &1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots \\
 &1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \dots \\
 &\text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

summieren.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \\
 \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \\
 \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta \\
 \alpha &= nx, \quad \beta = x,
 \end{aligned}$$

$$\sin(n+1)x = 2 \sin nx \cdot \cos x - \sin(n-1)x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also } \sin x &= \sin x \\
 - \sin 2x &= - 2 \sin x \cdot \cos x \\
 \sin 3x &= 2 \sin 2x \cdot \cos x - \sin x \\
 - \sin 4x &= - 2 \sin 3x \cdot \cos x + \sin 2x \\
 \sin 5x &= 2 \sin 4x \cdot \cos x - \sin 3x \\
 - \sin 6x &= - 2 \sin 5x \cdot \cos x + \sin 4x \\
 \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Also } S = \sin x - 2S \cdot \cos x - S, \text{ für } S = \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x + \dots \quad \text{Also}$$

$$2S + 2S \cos x = \sin x, \quad 2S(1 + \cos x) = \sin x, \quad 2S = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x}{2 \cos \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x} =$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x}. \quad \text{Also } S = \frac{1}{2} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} x. \quad \text{Aber}$$

$$\begin{aligned} S = & x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot \cdot 7} + \dots \\ & - 2x + \frac{2^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2^5 \cdot x^5}{1 \cdot \cdot 5} + \frac{2^7 \cdot x^7}{1 \cdot \cdot 7} - \dots \\ & + 3x - \frac{3^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3^5 \cdot x^5}{1 \cdot \cdot 5} - \frac{3^7 \cdot x^7}{1 \cdot \cdot 7} + \dots \\ & - 4x + \frac{4^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{4^5 \cdot x^5}{1 \cdot \cdot 5} + \frac{4^7 \cdot x^7}{1 \cdot \cdot 7} - \dots \\ & \quad \text{u. f. f.} \quad \quad \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) \cdot \frac{x}{1} \\ & - (1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots) \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & + (1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \dots) \cdot \frac{x^5}{1 \cdot \cdot 5} \\ & - (1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \dots) \cdot \frac{x^7}{1 \cdot \cdot 7} \\ & + \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Tg} x = \frac{2^2(2^2-1) \frac{1}{3} x}{1 \cdot 2} + \frac{2^4(2^4-1) \frac{2}{3} x^3}{1 \cdot \cdot 4} + \frac{2^6(2^6-1) \frac{3}{3} x^5}{1 \cdot \cdot 6} + \frac{2^8(2^8-1) \frac{4}{3} x^7}{1 \cdot \cdot 8} + \dots \quad (\S. 23.)$$

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} x = \frac{2(2^2-1) \frac{1}{3} x}{1 \cdot 2} + \frac{2(2^4-1) \frac{2}{3} x^3}{1 \cdot \cdot 4} + \frac{2(2^6-1) \frac{3}{3} x^5}{1 \cdot \cdot 6} + \frac{2(2^8-1) \frac{4}{3} x^7}{1 \cdot \cdot 8} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} x = \frac{(2^2-1) \frac{1}{3} x}{1 \cdot 2} + \frac{(2^4-1) \frac{2}{3} x^3}{1 \cdot \cdot 4} + \frac{(2^6-1) \frac{3}{3} x^5}{1 \cdot \cdot 6} + \frac{(2^8-1) \frac{4}{3} x^7}{1 \cdot \cdot 8} + \dots$$

$$\text{Also } 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{(2^2-1) \frac{1}{3}}{2}$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots = - \frac{(2^4-1) \frac{2}{3}}{4}$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \dots = \frac{(2^6-1) \frac{3}{3}}{6}$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \dots = -\frac{(2^8 - 1) \mathfrak{B}}{8}$$

u. f. f. u. f. f.

$$1 - 2^{2n-1} + 3^{2n-1} - 4^{2n-1} + \dots = \pm \frac{(2^{2n} - 1) \mathfrak{B}}{2n}$$

$\pm$ wenn $n \begin{cases} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{cases}$.

§. 31.

Die Summe der Reihe

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} - \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \text{u. f. f.}$$

sey, der obigen Bezeichnung gemäß, $= \sum \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}$, so ist nach §. 14.:

$$\sum \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1..7} + \dots$$

$$- \frac{1}{2^{2n-1}} \left(2x - \frac{2^3 \cdot x^3}{1.2.3} + \frac{2^5 \cdot x^5}{1..5} - \frac{2^7 \cdot x^7}{1..7} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{3^{2n-1}} \left(3x - \frac{3^3 \cdot x^3}{1.2.3} + \frac{3^5 \cdot x^5}{1..5} - \frac{3^7 \cdot x^7}{1..7} + \dots \right)$$

$$- \frac{1}{4^{2n-1}} \left(4x - \frac{4^3 \cdot x^3}{1.2.3} + \frac{4^5 \cdot x^5}{1..5} - \frac{4^7 \cdot x^7}{1..7} + \dots \right)$$

+ u. f. f.

$$= x \left(1 - \frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{3^{2n-2}} - \frac{1}{4^{2n-2}} + \dots \right)$$

$$- \frac{x^3}{1.2.3} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-4}} + \frac{1}{3^{2n-4}} - \frac{1}{4^{2n-4}} + \dots \right)$$

$$+ \frac{x^5}{1..5} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-6}} + \frac{1}{3^{2n-6}} - \frac{1}{4^{2n-6}} + \dots \right)$$

$$- \frac{x^7}{1..7} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-8}} + \frac{1}{3^{2n-8}} - \frac{1}{4^{2n-8}} + \dots \right)$$

+ u. f. f.

$$= x \sum \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1.2.3} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1..5} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-6}} - \frac{x^7}{1..7} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-8}} + \dots$$

$$= x \sum \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1.2.3} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1..5} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-6}} - \dots \mp \frac{x^{2n-3}}{1..(2n-3)} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-(2n-2)}}$$

$$\pm \frac{x^{2n-1}}{1..(2n-1)} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-2n}} \mp \frac{x^{2n+1}}{1..(2n+1)} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-(2n+2)}} \pm \frac{x^{2n+3}}{1..(2n+3)} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-(2n+4)}} \mp \text{u. f. f.}$$

$$\begin{aligned}
&= x \sum \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-6}} - \dots \mp \frac{x^{2n-3}}{1 \cdot \dots (2n-3)} \sum \pm \frac{1}{y^2} \\
&\quad \pm \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot \dots (2n-1)} \sum \pm y^0 \mp \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot \dots (2n+1)} \sum \pm y^2 \pm \frac{x^{2n+3}}{1 \cdot \dots (2n+3)} \sum \pm y^4 \mp \text{u. f. f.} \\
&= x \sum \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-6}} - \dots \mp \frac{x^{2n-3}}{1 \cdot \dots (2n-3)} \sum \pm \frac{1}{y^2} \\
&\quad \pm \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2} \quad (\S. 30.)
\end{aligned}$$

$$\pm \text{ wenn } n \begin{cases} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{cases}.$$

§. 32.

Hieraus erhält man, wenn $\pi - x$ für x gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\sin x + \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} + \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \dots &= \sum \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = (\pi - x) \sum \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \\
&\quad \frac{(\pi - x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{(\pi - x)^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \sum \pm \frac{1}{y^{2n-6}} - \dots \mp \frac{(\pi - x)^{2n-3}}{1 \cdot \dots (2n-3)} \sum \pm \frac{1}{y^2} \pm \frac{(\pi - x)^{2n-1}}{1 \cdot \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2}, \quad (\text{f})
\end{aligned}$$

da $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(2\pi - 2x) = -\sin 2x$, $\sin(3\pi - 3x) = \sin 3x$, $\sin(4\pi - 4x) = -\sin 4x$, u. f. w.

Denkt man sich die Potenzen des Binomiums $\pi - x$ entwickelt, so wird leicht erhellen, daß

$$\sum \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-3} \cdot x^{2n-3} + a_{2n-2} \cdot x^{2n-2} + a_{2n-1} \cdot x^{2n-1}.$$

I. Da nun offenbar $\sum \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = 0$ ist für $x = 0$, so ist auch $a = 0$, und folglich

$$\sum \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-3} \cdot x^{2n-3} + a_{2n-2} \cdot x^{2n-2} + a_{2n-1} \cdot x^{2n-1}.$$

$$\text{II. } \sum \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} + \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \dots$$

$$\frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \sum \frac{\sin 2yx}{y^{2n-1}} = \frac{\sin 2x}{2^{2n-2}} + \frac{\sin 4x}{2 \cdot 4^{2n-2}} + \frac{\sin 6x}{3 \cdot 6^{2n-2}} + \dots$$

$$\sum \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n-2}} \sum \frac{\sin 2yx}{y^{2n-1}} = \sin x + \left\{ \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} - \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2^{2n-2}} \right\} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} +$$

$$\left\{ \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} - \frac{\sin 4x}{2 \cdot 4^{2n-2}} \right\} + \frac{\sin 5x}{5^{2n-1}} + \left\{ \frac{\sin 6x}{6^{2n-1}} - \frac{\sin 6x}{3 \cdot 6^{2n-2}} \right\} + \text{u. f. f.}$$

$$= \sin x - \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} - \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \dots = \sum \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}.$$

Aber

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{2n-2} \cdot x^{2n-2} + \alpha_{2n-1} \cdot x^{2n-1},$$

$$\Sigma \frac{\sin 2yx}{y^{2n-1}} = 2\alpha_1 x + 4\alpha_2 x^2 + 8\alpha_3 x^3 + \dots + 2^{2n-2} \cdot \alpha_{2n-2} \cdot x^{2n-2} + 2^{2n-1} \cdot \alpha_{2n-1} \cdot x^{2n-1}.$$

Also

$$\left. \begin{aligned} & \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-3}}\right) x \\ & + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-4}}\right) x^2 \\ & + \alpha_3 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-5}}\right) x^3 \\ & \vdots \\ & + \alpha_{2n-3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) x^{2n-3} \\ & + \alpha_{2n-2} (1 - 1) x^{2n-2} \\ & + \alpha_{2n-1} (1 - 2) x^{2n-1} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & x \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}} \\ & - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}} \\ & + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-6}} \\ & \vdots \\ & \pm \frac{x^{2n-5}}{1 \cdot \dots \cdot (2n-5)} \Sigma \pm \frac{1}{y^4} \\ & \mp \frac{x^{2n-3}}{1 \cdot \dots \cdot (2n-3)} \Sigma \pm \frac{1}{y^2} \\ & \pm \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{2} \quad (\S. 31.) \end{aligned} \right.$$

und hieraus

$$\alpha_2 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-4}}\right) = 0, \quad \text{also } \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_4 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-6}}\right) = 0, \quad \alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_6 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-8}}\right) = 0, \quad \alpha_6 = 0,$$

$\vdots$

$$\alpha_{2n-4} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 0, \quad \alpha_{2n-4} = 0,$$

$$\alpha_{2n-2} \left(1 - \frac{1}{2^0}\right) = 0, \quad \alpha_{2n-2} = \frac{0}{0},$$

und eben so

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-3}}\right) = \alpha_1 \left(\frac{2^{2n-3}-1}{2^{2n-3}}\right) = \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}},$$

$$\alpha_3 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-5}}\right) = \alpha_3 \left(\frac{2^{2n-5}-1}{2^{2n-5}}\right) = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}},$$

$$\alpha_5 \left(1 - \frac{1}{2^{2n-7}}\right) = \alpha_5 \left(\frac{2^{2n-7}-1}{2^{2n-7}}\right) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-6}},$$

u. f. f.

u. f. f.

u. f. f.

$$a_{2n-3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = a_{2n-3} \left(\frac{2-1}{2}\right) = \mp \frac{1}{1 \dots (2n-3)} \Sigma \pm \frac{1}{y^2},$$

$$a_{2n-1} (1-2) = -a_{2n-1} = \pm \frac{1}{1 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2}.$$

Also

$$a_1 = \frac{2^{2n-3}}{2^{2n-3}-1} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}} = \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}},$$

$$a_3 = -\frac{2^{2n-5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 (2^{2n-5}-1)} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}},$$

$$a_5 = \frac{2^{2n-7}}{1 \cdot 3 \cdot 5 (2^{2n-7}-1)} \Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-6}} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-6}},$$

u. f. f. u. f. f.

$$a_{2n-3} = \mp \frac{2}{1 \dots (2n-3) (2-1)} \Sigma \pm \frac{1}{y^2} = \mp \frac{1}{1 \dots (2n-3)} \Sigma \frac{1}{y^2},$$

$$a_{2n-1} = \mp \frac{1}{1 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2},$$

denn es ist allgemein

$$1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \text{u. f. f.} = \Sigma \frac{1}{y^{2k}},$$

$$1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} - \frac{1}{6^{2k}} + \text{u. f. f.} = \Sigma \pm \frac{1}{y^{2k}},$$

$$\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \text{u. f. f.} = \frac{1}{2^{2k}} \Sigma \frac{1}{y^{2k}}, \text{ also}$$

$$2 \left(1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \dots\right) = \Sigma \frac{1}{y^{2k}} + \Sigma \pm \frac{1}{y^{2k}}, \text{ und}$$

$$1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \dots = \Sigma \frac{1}{y^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}} \Sigma \frac{1}{y^{2k}}$$

$$= \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}} \Sigma \frac{1}{y^{2k}}, \text{ also}$$

$$\Sigma \pm \frac{1}{y^{2k}} = \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}-1} \Sigma \frac{1}{y^{2k}} - \Sigma \frac{1}{y^{2k}} = \frac{2^{2k}-1-1}{2^{2k}-1} \Sigma \frac{1}{y^{2k}}.$$

III. Es bleibt also nur noch der Coefficient a_{2n-2} zu bestimmen übrig, da der Bruch $\frac{0}{0}$ bekanntlich eine völlig unbestimmte GröÙe bezeichnet. Es erhellet aber leicht aus der Formel (7), daß der zu x^{2n-2} gehörige Coefficient, d. i. a_{2n-2} , $= \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \dots (2n-2)} \cdot \frac{2n-1}{1} \cdot \pi = \pm \frac{\pi}{1 \dots (2n-2)} \cdot \frac{1}{2}$ ist. Es ist also

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = x \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-6}} - \frac{x^7}{1 \cdot 5 \cdot 7} \Sigma \frac{1}{y^{2n-8}} + \dots \mp \frac{x^{2n-3}}{1 \cdot \dots (2n-3)} \Sigma \frac{1}{y^2} \\ \pm \frac{x^{2n-2}}{1 \cdot \dots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \mp \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2}.$$

Dafs aber diese Formel für den Fall $n=1$ nicht gelten kann, erhellet aus ihr selbst deutlich, indem die Exponenten von x von 1 bis $2n-3$, $2n-2$, $2n-1$ steigen, welches für $n=1$ nicht stattfinden kann.

§. 33.

Da nun offenbar $\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = 0$ für $x=\pi$, so ist für jedes $n > 1$:

$$0 = \pi \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{\pi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{\pi^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-6}} - \dots \mp \frac{\pi^{2n-3}}{1 \cdot \dots (2n-3)} \Sigma \frac{1}{y^2} \pm \frac{\pi^{2n-2}}{1 \cdot \dots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \mp \frac{\pi^{2n-1}}{1 \cdot \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2} \\ = \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{\pi^4}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-6}} - \dots \mp \frac{\pi^{2n-4}}{1 \cdot \dots (2n-3)} \Sigma \frac{1}{y^2} \pm \frac{(n-1) \pi^{2n-2}}{1 \cdot \dots (2n-1)},$$

und folglich für jedes $n > 0$:

$$0 = \Sigma \frac{1}{y^{2(n+1)-2}} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \frac{1}{y^{2(n+1)-4}} + \frac{\pi^4}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \frac{1}{y^{2(n+1)-6}} - \dots \mp \frac{\pi^{2(n+1)-4}}{1 \cdot \dots [2(n+1)-3]} \Sigma \frac{1}{y^2} \\ \pm \frac{(n+1-1) \pi^{2(n+1)-2}}{1 \cdot \dots [2(n+1)-1]} \\ = \Sigma \frac{1}{y^{2n}} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} + \frac{\pi^4}{1 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} - \dots \mp \frac{\pi^{2n-2}}{1 \cdot \dots (2n-1)} \Sigma \frac{1}{y^2} \pm \frac{n \pi^{2n}}{1 \cdot \dots (2n+1)} \cdot m)$$

§. 34.

I. Das Product $(1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z) \dots$, welches sich unstreitig in eine Reihe von der Form

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$$

entwickeln läfst, sey $= Y$, und $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = S_1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots = S_2$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \dots = S_3$, u. s. w.

Es ist $\text{Logn } Y = \text{Logn } (1 + \alpha z) + \text{Logn } (1 + \beta z) + \text{Logn } (1 + \gamma z) + \dots$, also

$$\frac{dY}{Y} = \frac{\alpha dz}{1 + \alpha z} + \frac{\beta dz}{1 + \beta z} + \frac{\gamma dz}{1 + \gamma z} + \frac{\delta dz}{1 + \delta z} + \dots$$

m) Ueber §. 31. — §. 33. f. m. des Herrn Hofraths Pfaff schon angeführten Versuch einer neuen Summationsmethode, S. 5. — 11.

$$\begin{aligned}\frac{dY}{Ydz} &= \frac{\alpha}{1+\alpha z} + \frac{\beta}{1+\beta z} + \frac{\gamma}{1+\gamma z} + \frac{\delta}{1+\delta z} + \dots \\ &= \alpha - \alpha^2 z + \alpha^3 z^2 - \alpha^4 z^3 + \alpha^5 z^4 - \dots \\ &\quad + \beta - \beta^2 z + \beta^3 z^2 - \beta^4 z^3 + \beta^5 z^4 - \dots \\ &\quad + \gamma - \gamma^2 z + \gamma^3 z^2 - \gamma^4 z^3 + \gamma^5 z^4 - \dots \\ &\quad + \delta - \delta^2 z + \delta^3 z^2 - \delta^4 z^3 + \delta^5 z^4 - \dots \\ &\quad + \text{u. f. f.} \\ &= S_\alpha - zS_\alpha^2 + z^2S_\alpha^3 - z^3S_\alpha^4 + z^4S_\alpha^5 - \dots\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dz} &= B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \dots \\ \frac{dY}{Ydz} &= \frac{B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \dots}{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots}\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \dots &= (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots) \\ &\quad (S_\alpha - zS_\alpha^2 + z^2S_\alpha^3 - z^3S_\alpha^4 + \dots) \\ &= AS_\alpha - AzS_\alpha^2 + Az^2S_\alpha^3 - Az^3S_\alpha^4 + Az^4S_\alpha^5 - \dots \\ &\quad + BzS_\alpha - Bz^2S_\alpha^2 + Bz^3S_\alpha^3 - Bz^4S_\alpha^4 + \dots \\ &\quad + Cz^2S_\alpha - Cz^3S_\alpha^2 + Cz^4S_\alpha^3 - \dots \\ &\quad + Dz^3S_\alpha - Dz^4S_\alpha^2 + \dots \\ &\quad + Ez^4S_\alpha - \dots\end{aligned}$$

und hieraus, weil A offenbar $= 1$:

$$\begin{aligned}B - S_\alpha &= 0 \\ 2C - BS_\alpha + S_\alpha^2 &= 0 \\ 3D - CS_\alpha + BS_\alpha^2 - S_\alpha^3 &= 0 \\ 4E - DS_\alpha + CS_\alpha^2 - BS_\alpha^3 + S_\alpha^4 &= 0 \\ 5F - ES_\alpha + DS_\alpha^2 - CS_\alpha^3 + BS_\alpha^4 - S_\alpha^5 &= 0 \text{ n)} \\ \text{u. f. f.} &\quad \text{u. f. f.}\end{aligned}$$

II. Die Differenzialrechnung kann bey diesem Beweise auf folgendem Wege umgangen werden. Sey wie vorher

$$Y = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z) \dots = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots, \text{ und}$$

$$Y' = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \dots$$

so daß Y' aus Y abgeleitet wird, indem der Coefficient jedes Gliedes von Y mit seinem Exponenten multiplicirt, und dieser Exponent selbst um 1 verringert wird. Eine

n) M. f. *Coniectura physica circa propagationem soni ac luminis*, auct. L. Eulero. (*Opuscula varii argum.* T. II. Berol. 1750. 4. p. 110. seqq.)

Function, welche auf diese Art aus einer andern entspringt, heiße die derivirte Function von dieser, und soll überhaupt durch Y' bezeichnet werden.

Setzt man

$$P = (1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z)(1 + \varepsilon z) \dots = \mathcal{A} + \mathcal{B}z + \mathcal{C}z^2 + \mathcal{D}z^3 + \mathcal{E}z^4 + \dots, \text{ und}$$

$$P' = \mathcal{B} + 2\mathcal{C}z + 3\mathcal{D}z^2 + 4\mathcal{E}z^3 + \dots,$$

so findet zwischen Y' und P' folgende Relation Statt:

$$Y' = (1 + \alpha z)P' + \alpha P. \circ)$$

Da nämlich $Y = (1 + \alpha z)P$ ist, so ist $Y - P = \alpha Pz$; also $A - \mathcal{A} + (B - \mathcal{B})z + (C - \mathcal{C})z^2 + (D - \mathcal{D})z^3 + \dots = \alpha \mathcal{A}z + \alpha \mathcal{B}z^2 + \alpha \mathcal{C}z^3 + \alpha \mathcal{D}z^4 + \dots$, also $A - \mathcal{A} = 0$, $B - \mathcal{B} = \alpha \mathcal{A}$, $C - \mathcal{C} = \alpha \mathcal{B}$, $D - \mathcal{D} = \alpha \mathcal{C}$, u. f. w. Es ist aber

$$Y' - P' = B - \mathcal{B} + 2(C - \mathcal{C})z + 3(D - \mathcal{D})z^2 + 4(E - \mathcal{E})z^3 + 5(F - \mathcal{F})z^4 + \dots$$

$$\text{also} = \alpha \mathcal{A} + 2\alpha \mathcal{B}z + 3\alpha \mathcal{C}z^2 + 4\alpha \mathcal{D}z^3 + 5\alpha \mathcal{E}z^4 + \dots$$

$$\text{Aber } \alpha P = \alpha \mathcal{A} + \alpha \mathcal{B}z + \alpha \mathcal{C}z^2 + \alpha \mathcal{D}z^3 + \alpha \mathcal{E}z^4 + \dots$$

$$\alpha P'z = \alpha \mathcal{B}z + 2\alpha \mathcal{C}z^2 + 3\alpha \mathcal{D}z^3 + 4\alpha \mathcal{E}z^4 + \dots,$$

$$\text{also } \alpha P + \alpha P'z = \alpha \mathcal{A} + 2\alpha \mathcal{B}z + 3\alpha \mathcal{C}z^2 + 4\alpha \mathcal{D}z^3 + 5\alpha \mathcal{E}z^4 + \dots$$

$$\text{Also } Y' - P' = \alpha P + \alpha P'z, \text{ oder } Y' = (1 + \alpha z)P' + \alpha P. \text{ w. z. b. w.}$$

Setzt man nun $(1 + \gamma z)(1 + \delta z)(1 + \varepsilon z) \dots = P_1$,

$$(1 + \delta z)(1 + \varepsilon z)(1 + \zeta z) \dots = P_2,$$

$$(1 + \varepsilon z)(1 + \zeta z)(1 + \eta z) \dots = P_3,$$

$$(1 + \zeta z)(1 + \eta z)(1 + \vartheta z) \dots = P_4$$

u. f. f.

u. f. f.

und die derivirten Functionen von P_1, P_2, P_3, P_4 , u. f. w., $= P'_1, = P'_2, = P'_3, = P'_4$, u. f. w.; so ist

$$Y' = (1 + \alpha z)P' + \alpha P$$

$$P' = (1 + \beta z)P'_1 + \beta P_1$$

$$P'_1 = (1 + \gamma z)P'_2 + \gamma P_2$$

$$P'_2 = (1 + \delta z)P'_3 + \delta P_3$$

$$P'_3 = (1 + \varepsilon z)P'_4 + \varepsilon P_4$$

u. f. f.

u. f. f.

$$\text{Also } Y' = (1 + \alpha z)P' + \alpha P$$

$$(1 + \alpha z)P' = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)P'_1 + (1 + \alpha z)\beta P_1$$

$$(1 + \beta z)(1 + \alpha z)P'_1 = (1 + \gamma z)(1 + \beta z)(1 + \alpha z)P'_2 + (1 + \beta z)(1 + \alpha z)\gamma P_2$$

*) Ich erlaube mir, diese Relation nebst ihrem Beweise aus einer mir gütigst im Manuscript mitgetheilten Abhandlung des Herrn Hofraths Pfaff über den sogenannten Harriotischen Lehrsatz zu entlehnen.

$$\begin{aligned} (1+\gamma z)(1+\beta z)(1+\alpha z)P'_2 &= (1+\delta z)\dots(1+\alpha z)P'_3 + (1+\gamma z)(1+\beta z)(1+\alpha z)\delta P_3 \\ (1+\delta z)\dots(1+\alpha z)P'_3 &= (1+\varepsilon z)\dots(1+\alpha z)P'_4 + (1+\delta z)\dots(1+\alpha z)\varepsilon P_4 \\ &\text{u. f. f.} \qquad \text{u. f. f.} \qquad \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} Y' + (1+\alpha z)P' + (1+\beta z)(1+\alpha z)P'_1 + (1+\gamma z)\dots(1+\alpha z)P'_2 + (1+\delta z)\dots(1+\alpha z)P'_3 + \dots \\ = (1+\alpha z)P' + (1+\beta z)(1+\alpha z)P'_1 + (1+\gamma z)\dots(1+\alpha z)P'_2 + (1+\delta z)\dots(1+\alpha z)P'_3 + \dots \\ + \alpha P + (1+\alpha z)\beta P_1 + (1+\beta z)(1+\alpha z)\gamma P_2 + (1+\gamma z)\dots(1+\alpha z)\delta P_3 + (1+\delta z)\dots(1+\alpha z)\varepsilon P_4 + \dots \\ Y' = \alpha P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (1+\alpha z)\beta P_1 \\ &+ (1+\beta z)(1+\alpha z)\gamma P_2 \\ &+ (1+\gamma z)(1+\beta z)(1+\alpha z)\delta P_3 \\ &+ (1+\delta z)(1+\gamma z)(1+\beta z)(1+\alpha z)\varepsilon P_4 \\ &+ \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

Aber $P = \frac{Y}{1+\alpha z}$

$$P_1 = \frac{Y}{(1+\alpha z)(1+\beta z)}$$

$$P_2 = \frac{Y}{(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)}$$

$$P_3 = \frac{Y}{(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)}$$

$$P_4 = \frac{Y}{(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)}$$

u. f. f. u. f. f.

$$\begin{aligned} \text{Also } Y' &= \frac{\alpha Y}{1+\alpha z} + \frac{\beta Y}{1+\beta z} + \frac{\gamma Y}{1+\gamma z} + \frac{\delta Y}{1+\delta z} + \dots \\ &= Y \left(\frac{\alpha}{1+\alpha z} + \frac{\beta}{1+\beta z} + \frac{\gamma}{1+\gamma z} + \frac{\delta}{1+\delta z} + \dots \right) \\ &= Y \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \alpha^2 z + \alpha^3 z^2 - \alpha^4 z^3 + \alpha^5 z^4 - \dots \\ + \beta - \beta^2 z + \beta^3 z^2 - \beta^4 z^3 + \beta^5 z^4 - \dots \\ + \gamma - \gamma^2 z + \gamma^3 z^2 - \gamma^4 z^3 + \gamma^5 z^4 - \dots \\ + \delta - \delta^2 z + \delta^3 z^2 - \delta^4 z^3 + \delta^5 z^4 - \dots \\ + \text{u. f. f.} \end{array} \right\} \\ &= Y (S\alpha - zS\alpha^2 + z^2S\alpha^3 - z^3S\alpha^4 + z^4S\alpha^5 - \dots) \end{aligned}$$

Man erhält also folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \dots &= (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots) \\ &\quad (S\alpha - zS\alpha^2 + z^2S\alpha^3 - z^3S\alpha^4 + z^4S\alpha^5 \dots) \end{aligned}$$

woraus sich die obigen Gleichungen für A, B, C, D , u. f. f. auf dieselbe Art ergeben. Man sieht übrigens leicht, daß diese Gleichungen mit den bekannten Formeln des Neutonischen Satzes in der Theorie der Gleichungen übereinstimmen.

§. 35.

$$\text{Für } Y = \left(1 + \frac{1}{1}z\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}z\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}z\right) \left(1 + \frac{1}{4^2}z\right) \dots \\ = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \dots$$

$$\text{ist also } B - \sum \frac{1}{y^2} = 0$$

$$2C - B \sum \frac{1}{y^2} + \sum \frac{1}{y^4} = 0$$

$$3D - C \sum \frac{1}{y^2} + B \sum \frac{1}{y^4} - \sum \frac{1}{y^6} = 0$$

$$4E - D \sum \frac{1}{y^2} + C \sum \frac{1}{y^4} - B \sum \frac{1}{y^6} + \sum \frac{1}{y^8} = 0$$

$$5F - E \sum \frac{1}{y^2} + D \sum \frac{1}{y^4} - C \sum \frac{1}{y^6} + B \sum \frac{1}{y^8} - \sum \frac{1}{y^{10}} = 0$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

$$\text{oder } \sum \frac{1}{y^2} - B = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^4} - B \sum \frac{1}{y^2} + 2C = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^6} - B \sum \frac{1}{y^4} + C \sum \frac{1}{y^2} - 3D = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^8} - B \sum \frac{1}{y^6} + C \sum \frac{1}{y^4} - D \sum \frac{1}{y^2} + 4E = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^{10}} - B \sum \frac{1}{y^8} + C \sum \frac{1}{y^6} - D \sum \frac{1}{y^4} + E \sum \frac{1}{y^2} - 5F = 0$$

u. f. f. u. f. f.

Nach §. 33. ist

$$\sum \frac{1}{y^2} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^4} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^4}{1 \cdot 5} = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^6} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \frac{1}{y^4} + \frac{\pi^4}{1 \cdot 5} \sum \frac{1}{y^2} - \frac{3\pi^6}{1 \cdot 7} = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^8} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \frac{1}{y^6} + \frac{\pi^4}{1 \cdot 5} \sum \frac{1}{y^4} - \frac{\pi^6}{1 \cdot 7} \sum \frac{1}{y^2} + \frac{4\pi^8}{1 \cdot 9} = 0$$

$$\sum \frac{1}{y^{10}} - \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \frac{1}{y^8} + \frac{\pi^4}{1 \cdot 5} \sum \frac{1}{y^6} - \frac{\pi^6}{1 \cdot 7} \sum \frac{1}{y^4} + \frac{\pi^8}{1 \cdot 9} \sum \frac{1}{y^2} - \frac{5\pi^{10}}{1 \cdot 11} = 0$$

u. f. f. u. f. f.

Aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit den vorhergehenden ergibt sich leicht, daß

$$B = \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, C = \frac{\pi^4}{1 \cdot 5}, D = \frac{\pi^6}{1 \cdot 7}, E = \frac{\pi^8}{1 \cdot 9}, F = \frac{\pi^{10}}{1 \cdot 11}, G = \frac{\pi^{12}}{1 \cdot 13}, \text{ u. f. w., und folglich}$$

$$Y = \left(1 + \frac{1}{1}z\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}z\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}z\right) \left(1 + \frac{1}{4^2}z\right) \left(1 + \frac{1}{5^2}z\right) \dots$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}z + \frac{\pi^4}{1 \cdot 5}z^2 + \frac{\pi^6}{1 \cdot 7}z^3 + \frac{\pi^8}{1 \cdot 9}z^4 + \dots$$

§. 36.

Für $z = \frac{xx}{\pi\pi}$ erhält man hieraus

$$\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{xx}{2^2 \cdot \pi\pi}\right) \left(1 + \frac{xx}{3^2 \cdot \pi\pi}\right) \left(1 + \frac{xx}{4^2 \cdot \pi\pi}\right) \left(1 + \frac{xx}{5^2 \cdot \pi\pi}\right) \dots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 7} + \frac{x^8}{1 \cdot 9} + \text{u. f. f.}$$

Es ist aber

$$e^x - e^{-x} = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \frac{x^7}{1 \cdot 7} + \dots \\ -1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^4}{1 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 5} - \frac{x^6}{1 \cdot 6} + \frac{x^7}{1 \cdot 7} - \dots \end{cases}$$

$$= 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot 7} + \frac{x^9}{1 \cdot 9} + \dots \right)$$

$$= 2x \left(1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 7} + \frac{x^8}{1 \cdot 9} + \dots \right)$$

Also $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{2^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{3^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{4^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots$

$$= x \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi} \right) \dots$$

§. 37.

$$e^{2x} - e^{-2x} = (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}), \text{ also}$$

$$e^x + e^{-x} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^{2x} - e^{-2x}) : 2}{(e^x - e^{-x}) : 2}.$$

Also $e^x + e^{-x} = \frac{2x \left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{2^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{3^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{4^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{5^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots}{x \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{2^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{3^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{4^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{5^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left\{ 2 \left(1 + \frac{4xx}{2^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{4^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{6^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{4xx}{\pi\pi} \right\} \left(1 + \frac{4xx}{3^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{5^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots}{\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{2^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{3^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots} \\
&= 2 \left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{3^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{5^2 \cdot \pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{7^2 \cdot \pi\pi} \right) \dots \\
\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi} \right) \dots
\end{aligned}$$

§. 38.

Hieraus ergibt sich leicht die Zerlegung von $\sin \phi$ und $\cos \phi$.

I. $\sin \phi = \frac{e^{\phi \sqrt{-1}} - e^{-\phi \sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ (§. 15.); also

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \phi \sqrt{-1} \cdot \left(1 - \frac{\phi\phi}{\pi\pi} \right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{4\pi\pi} \right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{9\pi\pi} \right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{16\pi\pi} \right) \dots \quad (\S. 36.) \\
&= \phi \left(\frac{\pi\pi - \phi\phi}{\pi\pi} \right) \left(\frac{4\pi\pi - \phi\phi}{4\pi\pi} \right) \left(\frac{9\pi\pi - \phi\phi}{9\pi\pi} \right) \left(\frac{16\pi\pi - \phi\phi}{16\pi\pi} \right) \dots \\
&= \phi \left(\frac{\pi - \phi}{\pi} \right) \left(\frac{\pi + \phi}{\pi} \right) \left(\frac{2\pi - \phi}{2\pi} \right) \left(\frac{2\pi + \phi}{2\pi} \right) \left(\frac{3\pi - \phi}{3\pi} \right) \left(\frac{3\pi + \phi}{3\pi} \right) \dots \\
&= \phi \left(1 - \frac{\phi}{\pi} \right) \left(1 + \frac{\phi}{\pi} \right) \left(1 - \frac{\phi}{2\pi} \right) \left(1 + \frac{\phi}{2\pi} \right) \left(1 - \frac{\phi}{3\pi} \right) \left(1 + \frac{\phi}{3\pi} \right) \dots
\end{aligned}$$

II. $\cos \phi = \frac{e^{\phi \sqrt{-1}} + e^{-\phi \sqrt{-1}}}{2}$ (§. 17.); also

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{4\phi\phi}{\pi\pi} \right) \left(1 - \frac{4\phi\phi}{9\pi\pi} \right) \left(1 - \frac{4\phi\phi}{25\pi\pi} \right) \left(1 - \frac{4\phi\phi}{49\pi\pi} \right) \dots \quad (\S. 37.) \\
&= \left(\frac{\pi\pi - 4\phi\phi}{\pi\pi} \right) \left(\frac{9\pi\pi - 4\phi\phi}{9\pi\pi} \right) \left(\frac{25\pi\pi - 4\phi\phi}{25\pi\pi} \right) \left(\frac{49\pi\pi - 4\phi\phi}{49\pi\pi} \right) \dots \\
&= \left(\frac{\pi - 2\phi}{\pi} \right) \left(\frac{\pi + 2\phi}{\pi} \right) \left(\frac{3\pi - 2\phi}{3\pi} \right) \left(\frac{3\pi + 2\phi}{3\pi} \right) \left(\frac{5\pi - 2\phi}{5\pi} \right) \left(\frac{5\pi + 2\phi}{5\pi} \right) \dots \\
&= \left(1 - \frac{2\phi}{\pi} \right) \left(1 + \frac{2\phi}{\pi} \right) \left(1 - \frac{2\phi}{3\pi} \right) \left(1 + \frac{2\phi}{3\pi} \right) \left(1 - \frac{2\phi}{5\pi} \right) \left(1 + \frac{2\phi}{5\pi} \right) \dots
\end{aligned}$$

§. 39.

Setzt man $\phi = \frac{m\pi}{2n}$, so erhält man

I. $\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \left(\frac{2n-m}{2n} \right) \left(\frac{2n+m}{2n} \right) \left(\frac{4n-m}{4n} \right) \left(\frac{4n+m}{4n} \right) \left(\frac{6n-m}{6n} \right) \dots$

II. $\cos \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n} \right) \left(\frac{n+m}{n} \right) \left(\frac{3n-m}{3n} \right) \left(\frac{3n+m}{3n} \right) \left(\frac{5n-m}{5n} \right) \left(\frac{5n+m}{5n} \right) \dots$

und hieraus, wenn man $n-m$ für m setzt:

$$\text{III. } \cos \frac{m\pi}{2n} = \frac{(n-m)\pi}{2n} \left(\frac{n+m}{2n} \right) \left(\frac{3n-m}{2n} \right) \left(\frac{3n+m}{4n} \right) \left(\frac{5n-m}{4n} \right) \left(\frac{5n+m}{6n} \right) \dots$$

$$\text{IV. } \sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n} \left(\frac{2n-m}{n} \right) \left(\frac{2n+m}{3n} \right) \left(\frac{4n-m}{3n} \right) \left(\frac{4n+m}{5n} \right) \left(\frac{6n-m}{5n} \right) \dots$$

da nämlich $\sin \frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n} \right) = \cos \frac{m\pi}{2n}$ und $\cos \frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n} \right) = \sin \frac{m\pi}{2n}$.

$$\text{V. Aus I. erhält man } \frac{\pi}{2} = \frac{n}{m} \sin \frac{m\pi}{2n} \left(\frac{2n}{2n-m} \right) \left(\frac{2n}{2n+m} \right) \left(\frac{4n}{4n-m} \right) \left(\frac{4n}{4n+m} \right) \dots$$

$$\text{Für } \frac{m}{n} = \frac{1}{1} \text{ ist } \sin \frac{m\pi}{2n} = \sin \frac{1}{2}\pi = 1, \text{ also } \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots};$$

$$\text{also } \frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots}, \quad \frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}.$$

Bezeichnet man die Kreisfläche durch K , den Halbmesser durch r und den Durchmesser durch d , so ist $K = r^2 \cdot \pi = \frac{4r^2 \cdot \pi}{4} = d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$, also $d^2 = \frac{4}{\pi} \cdot K$. Das Quadrat des Durchmessers eines Kreises ist also $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}$, wenn man die Kreisfläche $= 1$ setzt. Die erste Entdeckung dieses merkwürdigen Satzes gebührt dem berühmten brittischen Geometer *Johann Wallis*, welcher im Jahre 1703 im sieben und achtzigsten Jahre starb. M. f. *Joh. Wallisii*, S. S. Theologiae Doctoris, *Opera mathematica tribus voluminibus comprehensa*. Oxonii 1665 — 1699. fol. Vol. I. p. 468.

$$\text{Für } \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \text{ ist } \sin \frac{m\pi}{2n} = \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{also } \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \dots}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \dots},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \dots}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \dots} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots} \times \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \dots}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \dots} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 18 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \dots}. \end{aligned}$$

$$\text{Für } \frac{m}{n} = \frac{1}{3} \text{ ist } \sin \frac{m\pi}{2n} = \sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2};$$

$$\text{also } \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \dots}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \dots}.$$

Auf diese Art könnte man noch eine Menge ähnlicher Ausdrücke für π erhalten, welche zwar zur Berechnung von π selbst nicht tauglich sind, bey der Berechnung des Logarithmen von π aber vortreffliche Dienste leisten. M. f. *Introd. in Anal. Inf.* Cap. XI.

§. 40.

Aus §. 39. I. III. erhält man leicht:

$$\text{I.} \quad \operatorname{Tg} \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m} \left(\frac{2n-m}{n+m} \right) \left(\frac{2n+m}{3n-m} \right) \left(\frac{4n-m}{3n+m} \right) \left(\frac{4n+m}{5n-m} \right) \dots$$

$$\text{II.} \quad \operatorname{Cotg} \frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{m} \left(\frac{n+m}{2n-m} \right) \left(\frac{3n-m}{2n+m} \right) \left(\frac{3n+m}{4n-m} \right) \left(\frac{5n-m}{4n+m} \right) \dots$$

Aus §. 39. II. IV.:

$$\text{III.} \quad \operatorname{Sec} \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m} \right) \left(\frac{n}{n+m} \right) \left(\frac{3n}{3n-m} \right) \left(\frac{3n}{3n+m} \right) \left(\frac{5n}{5n-m} \right) \left(\frac{5n}{5n+m} \right) \dots$$

$$\text{IV.} \quad \operatorname{Cofec} \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m} \left(\frac{n}{2n-m} \right) \left(\frac{3n}{2n+m} \right) \left(\frac{3n}{4n-m} \right) \left(\frac{5n}{4n+m} \right) \left(\frac{5n}{6n-m} \right) \dots$$

Aus §. 39. I. II. und III. IV.:

$$\text{V.} \quad \operatorname{Tg} \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{n-m} \right) \cdot \frac{1(2n-m)}{2(n+m)} \cdot \frac{3(2n+m)}{2(3n-m)} \cdot \frac{3(4n-m)}{4(3n+m)} \cdot \frac{5(4n+m)}{4(5n-m)} \dots$$

$$\text{VI.} \quad \operatorname{Cotg} \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n-m}{m} \right) \cdot \frac{1(n+m)}{2(2n-m)} \cdot \frac{3(3n-m)}{2(2n+m)} \cdot \frac{3(3n+m)}{4(4n-m)} \cdot \frac{5(5n-m)}{4(4n+m)} \dots$$

Aus §. 39. III. I.:

$$\text{VII.} \quad \operatorname{Sec} \frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{n}{n-m} \right) \left(\frac{2n}{n+m} \right) \left(\frac{2n}{3n-m} \right) \left(\frac{4n}{3n+m} \right) \left(\frac{4n}{5n-m} \right) \dots$$

$$\text{VIII.} \quad \operatorname{Cofec} \frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{m} \left(\frac{2n}{2n-m} \right) \left(\frac{2n}{2n+m} \right) \left(\frac{4n}{4n-m} \right) \left(\frac{4n}{4n+m} \right) \dots$$

§. 41.

Wenn man in §. 39. k für m setzt, so erhält man leicht:

$$\text{I.} \quad \frac{\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{Sin} \frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k} \left(\frac{2n-m}{2n-k} \right) \left(\frac{2n+m}{2n+k} \right) \left(\frac{4n-m}{4n-k} \right) \left(\frac{4n+m}{4n+k} \right) \dots \quad (\S. 39. \text{I.})$$

$$\text{II.} \quad \frac{\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{Cos} \frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{n-k} \left(\frac{2n-m}{n+k} \right) \left(\frac{2n+m}{3n-k} \right) \left(\frac{4n-m}{3n+k} \right) \left(\frac{4n+m}{5n-k} \right) \dots \quad (\S. 39. \text{I. III.})$$

$$\text{III.} \quad \frac{\operatorname{Cos} \frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{Cos} \frac{k\pi}{2n}} = \left(\frac{n-m}{n-k} \right) \left(\frac{n+m}{n+k} \right) \left(\frac{3n-m}{3n-k} \right) \left(\frac{3n+m}{3n+k} \right) \left(\frac{5n-m}{5n-k} \right) \dots \quad (\S. 39. \text{II.})$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\operatorname{Cos} \frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{Sin} \frac{k\pi}{2n}} = \left(\frac{n-m}{k} \right) \left(\frac{n+m}{2n-k} \right) \left(\frac{3n-m}{2n+k} \right) \left(\frac{3n+m}{4n-k} \right) \left(\frac{5n-m}{4n+k} \right) \dots \quad (\S. 39. \text{II. IV.})$$

§. 42.

Da $\frac{e^x \pm e^y}{2} = e^{\frac{x+y}{2}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{x-y}{2}} \pm e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} \right)$ ist, so ist, nach §. 37.:

$$\text{I. } \frac{e^x + e^y}{2} = e^{\frac{x+y}{2}} \cdot \left(1 + \frac{(x-y)^2}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{25\pi\pi} \right) \dots$$

$$\text{II. } \frac{e^x - e^y}{2} = e^{\frac{x+y}{2}} \cdot \left(\frac{x-y}{2} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{16\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{36\pi\pi} \right) \dots$$

Hieraus erhält man durch Vertauschung von x und y mit $-x$ und $-y$:

$$\text{III. } \frac{e^x + e^{-y}}{2} = e^{\frac{x-y}{2}} \cdot \left(1 + \frac{(x+y)^2}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{25\pi\pi} \right) \dots$$

$$\text{IV. } \frac{e^{-x} + e^{-y}}{2} = e^{-\frac{x+y}{2}} \cdot \left(1 + \frac{(x-y)^2}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{25\pi\pi} \right) \dots$$

$$\text{V. } \frac{e^x - e^{-y}}{2} = e^{\frac{x-y}{2}} \cdot \left(\frac{x+y}{2} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{16\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{36\pi\pi} \right) \dots$$

$$\text{VI. } \frac{e^{-x} - e^{-y}}{2} = e^{-\frac{x+y}{2}} \cdot \left(\frac{y-x}{2} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{16\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{36\pi\pi} \right) \dots$$

Also für $y = 0$:

$$\text{VII. } \frac{e^x + 1}{2} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi} \right) \dots \quad (\text{I.})$$

$$\text{VIII. } \frac{e^x - 1}{2} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2} \right) \left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{xx}{36\pi\pi} \right) \dots \quad (\text{II.})$$

§. 43.

Da $e^x[(e^x + e^{-x}) + (e^y + e^{-y})] = (e^x + e^y)(e^x + e^{-y})$,

$e^x[(e^x + e^{-x}) - (e^y + e^{-y})] = (e^x - e^y)(e^x - e^{-y})$,

$e^x[(e^x - e^{-x}) + (e^y - e^{-y})] = (e^x + e^y)(e^x - e^{-y})$,

$e^x[(e^x - e^{-x}) - (e^y - e^{-y})] = (e^x + e^{-y})(e^x - e^y)$; so ist

$$\text{I. } e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y} = 4 \left(1 + \frac{(x-y)^2}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{9\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{9\pi\pi} \right) \\ \left(1 + \frac{(x-y)^2}{25\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{25\pi\pi} \right) \dots \quad (\S. 42. \text{ I. III.})$$

$$\text{II. } e^x + e^{-x} - e^y - e^{-y} = (x^2 - y^2) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{4\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{16\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{16\pi\pi} \right) \\ \left(1 + \frac{(x-y)^2}{36\pi\pi} \right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{36\pi\pi} \right) \dots \quad (\S. 42. \text{ II. V.})$$

$$\text{III. } e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 2(x+y) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{4\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{9\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{16\pi\pi}\right) \\ \left(1 + \frac{(x-y)^2}{25\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{36\pi\pi}\right) \dots \quad (\S. 42. \text{ I. V.})$$

$$\text{IV. } e^x - e^{-x} - e^y + e^{-y} = 2(x-y) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{4\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x+y)^2}{9\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{16\pi\pi}\right) \\ \left(1 + \frac{(x+y)^2}{25\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x-y)^2}{36\pi\pi}\right) \dots \quad (\S. 42. \text{ II. III.})$$

§. 44.

$$e^{b+x} + e^{c-x} = 2e^{\frac{b+c}{2}} \cdot \left(1 + \frac{(b-c+2x)^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(b-c+2x)^2}{9\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(b-c+2x)^2}{25\pi\pi}\right) \dots \quad (\S. 42. \text{ I.})$$

$$e^b + e^c = 2e^{\frac{b+c}{2}} \cdot \left(1 + \frac{(b-c)^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(b-c)^2}{9\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(b-c)^2}{25\pi\pi}\right) \dots \quad (\S. 42. \text{ I.})$$

Also

$$\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c} = \left(\frac{\pi\pi + (b-c+2x)^2}{\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(\frac{9\pi\pi + (b-c+2x)^2}{9\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(\frac{25\pi\pi + (b-c+2x)^2}{25\pi\pi + (b-c)^2}\right) \dots$$

oder

$$\text{I. } \frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c} = \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{9\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{25\pi\pi + (b-c)^2}\right) \dots$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man

$$\text{II. } \frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c} = \left(1 + \frac{2x}{b-c}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{4\pi\pi + (b-c)^2}\right) \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{16\pi\pi + (b-c)^2}\right) \dots$$

§. 45.

Hieraus erhält man, wenn $b = 0$ gesetzt wird:

$$\text{I. } \frac{e^x + e^{c-x}}{1 + e^c} = \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{25\pi\pi + cc}\right) \dots$$

$$\text{II. } \frac{e^x - e^{c-x}}{1 - e^c} = \left(1 - \frac{2x}{c}\right) \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{36\pi\pi + cc}\right) \dots$$

und wenn c mit $-c$ vertauscht wird:

$$\text{III. } \frac{e^x + e^{-c-x}}{1 + e^{-c}} = \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{25\pi\pi + cc}\right) \dots$$

$$\text{IV. } \frac{e^x - e^{-c-x}}{1 - e^{-c}} = \left(1 + \frac{2x}{c}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{36\pi\pi + cc}\right) \dots$$

§. 46.

$$\frac{e^x + e^{-x} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^c + e^{-c}}{\left(e^{\frac{1}{2}c} + e^{-\frac{1}{2}c}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi\pi + (x-c)^2}{\pi\pi + cc}\right) \left(\frac{\pi\pi + (x+c)^2}{\pi\pi + cc}\right) \left(\frac{9\pi\pi + (x-c)^2}{9\pi\pi + cc}\right) \left(\frac{9\pi\pi + (x+c)^2}{9\pi\pi + cc}\right) \dots \quad (\S. 43. I. \S. 42. III.)$$

Also

$$I. \frac{e^x + e^{-x} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}} = \left(1 - \frac{2cx - xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{9\pi\pi + cc}\right) \dots$$

Eben so erhält man aus §. 45. III. §. 42. V.:

$$II. \frac{e^x - e^{-x} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}} = \left(1 + \frac{x}{c}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{16\pi\pi + cc}\right) \dots;$$

aus §. 43. IV. §. 42. V.:

$$III. \frac{e^c - e^{-c} - e^x + e^{-x}}{e^c - e^{-c}} = \left(1 - \frac{x}{c}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{9\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{16\pi\pi + cc}\right) \dots;$$

aus §. 43. II. §. 42. V.:

$$IV. \frac{e^x + e^{-x} - e^c - e^{-c}}{2 - e^c - e^{-c}} = \left(1 - \frac{xx}{cc}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{4\pi\pi + cc}\right) \left(1 - \frac{2cx - xx}{16\pi\pi + cc}\right) \left(1 + \frac{2cx + xx}{16\pi\pi + cc}\right) \dots$$

$$\text{weil } 2 - e^c - e^{-c} = -\left(e^{\frac{1}{2}c} - e^{-\frac{1}{2}c}\right)^2 \quad p)$$

§. 47.

Für $x = \phi\sqrt{-1}$ und $c = \psi\sqrt{-1}$ ist, weil $e^{\phi\sqrt{-1}} + e^{-\phi\sqrt{-1}} = 2\cos\phi$, und $e^{\phi\sqrt{-1}} - e^{-\phi\sqrt{-1}} = 2\sin\phi\sqrt{-1}$:

$$\frac{e^x + e^{-x} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}} = \frac{2\cos\phi + 2\cos\psi}{2 + 2\cos\psi} = \frac{\cos\phi + \cos\psi}{1 + \cos\psi},$$

$$\frac{e^x - e^{-x} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}} = \frac{2\sin\phi\sqrt{-1} + 2\sin\psi\sqrt{-1}}{2\sin\psi\sqrt{-1}} = \frac{\sin\phi + \sin\psi}{\sin\psi},$$

$$\frac{e^c - e^{-c} - e^x + e^{-x}}{e^c - e^{-c}} = \frac{2\sin\psi\sqrt{-1} - 2\sin\phi\sqrt{-1}}{2\sin\psi\sqrt{-1}} = \frac{\sin\psi - \sin\phi}{\sin\psi},$$

$$\frac{e^x + e^{-x} - e^c - e^{-c}}{2 - e^c - e^{-c}} = \frac{2\cos\phi - 2\cos\psi}{2 - 2\cos\psi} = \frac{\cos\phi - \cos\psi}{1 - \cos\psi}.$$

p) Die Formeln in §. 45. u. 46. entsprechen den Formeln in §. 162 der *Introd. in Anal. Inf.*, welche aber, wie auch schon Herr Professor *L'Huilier* in der angeführten Abhandlung bemerkt hat, durch mehrere Druckfehler entstellt sind.

Also

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \frac{\cos \varphi + \cos \psi}{1 + \cos \psi} &= \left(1 + \frac{2\psi\varphi - \varphi\varphi}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\psi\varphi + \varphi\varphi}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{2\psi\varphi - \varphi\varphi}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\psi\varphi + \varphi\varphi}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{2\psi\varphi - \varphi\varphi}{25\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\psi\varphi + \varphi\varphi}{25\pi\pi - \psi\psi}\right) \dots \quad (\S. 46. \text{ I.}) \\
 &= \left(\frac{\pi\pi - \psi\psi + 2\psi\varphi - \varphi\varphi}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(\frac{\pi\pi - \psi\psi - 2\psi\varphi - \varphi\varphi}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{9\pi\pi - \psi\psi + 2\psi\varphi - \varphi\varphi}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(\frac{9\pi\pi - \psi\psi - 2\psi\varphi - \varphi\varphi}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{25\pi\pi - \psi\psi + 2\psi\varphi - \varphi\varphi}{25\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(\frac{25\pi\pi - \psi\psi - 2\psi\varphi - \varphi\varphi}{25\pi\pi - \psi\psi}\right) \dots \\
 &= \left(\frac{\pi\pi - (\psi - \varphi)^2}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(\frac{\pi\pi - (\psi + \varphi)^2}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(\frac{9\pi\pi - (\psi - \varphi)^2}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(\frac{9\pi\pi - (\psi + \varphi)^2}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \dots \\
 &= \left(\frac{\pi - \psi + \varphi}{\pi - \psi}\right) \left(\frac{\pi + \psi - \varphi}{\pi + \psi}\right) \left(\frac{\pi - \psi - \varphi}{\pi - \psi}\right) \left(\frac{\pi + \psi + \varphi}{\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{3\pi - \psi + \varphi}{3\pi - \psi}\right) \left(\frac{3\pi + \psi - \varphi}{3\pi + \psi}\right) \left(\frac{3\pi - \psi - \varphi}{3\pi - \psi}\right) \left(\frac{3\pi + \psi + \varphi}{3\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{5\pi - \psi + \varphi}{5\pi - \psi}\right) \left(\frac{5\pi + \psi - \varphi}{5\pi + \psi}\right) \left(\frac{5\pi - \psi - \varphi}{5\pi - \psi}\right) \left(\frac{5\pi + \psi + \varphi}{5\pi + \psi}\right) \dots \\
 &= \left(1 + \frac{\varphi}{\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi + \psi}\right) \left(1 + \frac{\varphi}{\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{\varphi}{3\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{3\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{3\pi + \psi}\right) \left(1 + \frac{\varphi}{3\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{\varphi}{5\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{5\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{5\pi + \psi}\right) \left(1 + \frac{\varphi}{5\pi + \psi}\right) \dots \\
 &= \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{(\pi - \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{(\pi + \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{(3\pi - \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{(3\pi + \psi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{(5\pi - \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{(5\pi + \psi)^2}\right) \dots
 \end{aligned}$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man:

$$\begin{aligned}
 \text{II. } \frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \psi} &= \left(1 + \frac{\varphi}{\psi}\right) \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \varphi\varphi}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\varphi\psi + \varphi\varphi}{4\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \varphi\varphi}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\varphi\psi + \varphi\varphi}{16\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \varphi\varphi}{25\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\varphi\psi + \varphi\varphi}{36\pi\pi - \psi\psi}\right) \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{\phi}{\psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{\pi + \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{2\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{2\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{\phi}{3\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{3\pi + \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{4\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{4\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{\phi}{5\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{5\pi + \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{6\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{6\pi + \psi}\right) \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III. } \frac{\sin \psi - \sin \phi}{\sin \psi} &= \left(1 - \frac{\phi}{\psi}\right) \left(1 - \frac{2\phi\psi + \phi\phi}{\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 + \frac{2\phi\psi - \phi\phi}{4\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{2\phi\psi + \phi\phi}{9\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 + \frac{2\phi\psi - \phi\phi}{16\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{2\phi\psi + \phi\phi}{25\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 + \frac{2\phi\psi - \phi\phi}{36\pi\pi - \psi\psi}\right) \dots \\
 &= \left(1 - \frac{\phi}{\psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{\pi + \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{2\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{2\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{\phi}{3\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{3\pi + \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{4\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{4\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{\phi}{5\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{5\pi + \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{6\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{6\pi + \psi}\right) \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV. } \frac{\cos \phi - \cos \psi}{1 - \cos \psi} &= \left(1 - \frac{\phi\phi}{\psi\psi}\right) \left(1 + \frac{2\phi\psi - \phi\phi}{4\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\phi\psi + \phi\phi}{4\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{2\phi\psi - \phi\phi}{16\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\phi\psi + \phi\phi}{16\pi\pi - \psi\psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{2\phi\psi - \phi\phi}{36\pi\pi - \psi\psi}\right) \left(1 - \frac{2\phi\psi + \phi\phi}{36\pi\pi - \psi\psi}\right) \dots \\
 &= \left(1 - \frac{\phi}{\psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{\psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{2\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{2\pi + \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{2\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{2\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{\phi}{4\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{4\pi + \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{4\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{4\pi + \psi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{\phi}{6\pi - \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{6\pi + \psi}\right) \left(1 - \frac{\phi}{6\pi - \psi}\right) \left(1 + \frac{\phi}{6\pi + \psi}\right) \dots \\
 &= \left(1 - \frac{\phi\phi}{\psi\psi}\right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{(2\pi - \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{(2\pi + \psi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{\phi\phi}{(4\pi - \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{(4\pi + \psi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{\phi\phi}{(6\pi - \psi)^2}\right) \left(1 - \frac{\phi\phi}{(6\pi + \psi)^2}\right) \dots
 \end{aligned}$$

§. 48.

Da $\frac{e^x + e^{c-x}}{1 + e^c} = \frac{(e^x + e^{c-x})(1 + e^{-c})}{(1 + e^c)(1 + e^{-c})} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{c-x} + e^{-(c-x)}}{2 + e^c + e^{-c}}$
 und $\frac{e^x - e^{c-x}}{1 - e^c} = \frac{(e^x - e^{c-x})(1 - e^{-c})}{(1 - e^c)(1 - e^{-c})} = \frac{e^x + e^{-x} - e^{c-x} - e^{-(c-x)}}{2 - e^c - e^{-c}}$ ist,

so ist für $c = \varphi \sqrt{-1}$ und $x = \frac{1}{2} \psi \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{c-x}}{1 + e^c} &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} \psi + 2 \cos \left(\varphi - \frac{1}{2} \psi \right)}{2 + 2 \cos \varphi} = \frac{\cos \frac{1}{2} \psi + \cos \left(\varphi - \frac{1}{2} \psi \right)}{1 + \cos \varphi} = \\ &= \frac{(1 + \cos \varphi) \cdot \cos \frac{1}{2} \psi + \sin \varphi \cdot \sin \frac{1}{2} \psi}{1 + \cos \varphi} = \cos \frac{1}{2} \psi + \frac{\sin \varphi \sin \frac{1}{2} \psi}{1 + \cos \varphi} = \\ &= \cos \frac{1}{2} \psi + \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \varphi \cdot \sin \frac{1}{2} \psi = \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \psi + \sin \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} \psi}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)}{\cos \frac{1}{2} \varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{c-x}}{1 - e^c} &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} \psi - 2 \cos \left(\varphi - \frac{1}{2} \psi \right)}{2 - 2 \cos \varphi} = \frac{\cos \frac{1}{2} \psi - \cos \left(\varphi - \frac{1}{2} \psi \right)}{1 - \cos \varphi} = \\ &= \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \frac{1}{2} \psi - \sin \varphi \sin \frac{1}{2} \psi}{1 - \cos \varphi} = \cos \frac{1}{2} \psi - \frac{\sin \varphi \sin \frac{1}{2} \psi}{1 - \cos \varphi} = \\ &= \cos \frac{1}{2} \psi - \operatorname{Ctg} \frac{1}{2} \varphi \cdot \sin \frac{1}{2} \psi = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \psi - \cos \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} \psi}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \psi)}{\sin \frac{1}{2} \varphi}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)}{\cos \frac{1}{2} \varphi} &= \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \psi^2}{\pi\pi - \varphi\varphi} \right) \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \psi^2}{9\pi\pi - \varphi\varphi} \right) \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \psi^2}{25\pi\pi - \varphi\varphi} \right) \dots \quad (\S. 45. \text{ I.}) \\ &= \left(\frac{\pi\pi - (\varphi - \psi)^2}{\pi\pi - \varphi\varphi} \right) \left(\frac{9\pi\pi - (\varphi - \psi)^2}{9\pi\pi - \varphi\varphi} \right) \left(\frac{25\pi\pi - (\varphi - \psi)^2}{25\pi\pi - \varphi\varphi} \right) \dots \\ &= \left(\frac{\pi - \varphi + \psi}{\pi - \varphi} \right) \left(\frac{\pi + \varphi - \psi}{\pi + \varphi} \right) \left(\frac{3\pi - \varphi + \psi}{3\pi - \varphi} \right) \left(\frac{3\pi + \varphi - \psi}{3\pi + \varphi} \right) \left(\frac{5\pi - \varphi + \psi}{5\pi - \varphi} \right) \dots \\ &= \left(1 + \frac{\psi}{\pi - \varphi} \right) \left(1 - \frac{\psi}{\pi + \varphi} \right) \left(1 + \frac{\psi}{3\pi - \varphi} \right) \left(1 - \frac{\psi}{3\pi + \varphi} \right) \left(1 + \frac{\psi}{5\pi - \varphi} \right) \dots; \end{aligned}$$

und wenn man $-\psi$ für ψ setzt:

$$\text{II. } \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \psi)}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \left(1 - \frac{\psi}{\pi - \varphi} \right) \left(1 + \frac{\psi}{\pi + \varphi} \right) \left(1 - \frac{\psi}{3\pi - \varphi} \right) \left(1 + \frac{\psi}{3\pi + \varphi} \right) \left(1 - \frac{\psi}{5\pi - \varphi} \right) \dots$$

$$\text{III. } \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \left(1 - \frac{\psi}{\varphi}\right) \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \psi^2}{4\pi\pi - \varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \psi^2}{16\pi\pi - \varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{2\varphi\psi - \psi^2}{36\pi\pi - \varphi\varphi}\right) \dots \quad (\S. 45. \text{ II.})$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{\psi}{\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - (\varphi - \psi)^2}{4\pi\pi - \varphi\varphi}\right) \left(\frac{16\pi\pi - (\varphi - \psi)^2}{16\pi\pi - \varphi\varphi}\right) \left(\frac{36\pi\pi - (\varphi - \psi)^2}{36\pi\pi - \varphi\varphi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{\psi}{\varphi}\right) \left(\frac{2\pi - \varphi + \psi}{2\pi - \varphi}\right) \left(\frac{2\pi + \varphi - \psi}{2\pi + \varphi}\right) \left(\frac{4\pi - \varphi + \psi}{4\pi - \varphi}\right) \left(\frac{4\pi + \varphi - \psi}{4\pi + \varphi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{\psi}{\varphi}\right) \left(1 + \frac{\psi}{2\pi - \varphi}\right) \left(1 - \frac{\psi}{2\pi + \varphi}\right) \left(1 + \frac{\psi}{4\pi - \varphi}\right) \left(1 - \frac{\psi}{4\pi + \varphi}\right) \dots \end{aligned}$$

$$\text{IV. } \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \left(1 + \frac{\psi}{\varphi}\right) \left(1 - \frac{\psi}{2\pi - \varphi}\right) \left(1 + \frac{\psi}{2\pi + \varphi}\right) \left(1 - \frac{\psi}{4\pi - \varphi}\right) \left(1 + \frac{\psi}{4\pi + \varphi}\right) \dots$$

Diese Formeln, in einander multiplicirt, geben die Formeln in §. 47.

§. 49.

Setzt man in §. 46. IV. $c = 2\varphi\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\frac{e^x - (e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}}) + e^{-x}}{2 - (e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}})} = \frac{e^x - 2\cos 2\varphi + e^{-x}}{2 - 2\cos 2\varphi} = \frac{e^x - 2\cos 2\varphi + e^{-x}}{2(1 - \cos 2\varphi)} = \frac{e^x - 2\cos 2\varphi + e^{-x}}{4\sin^2 \varphi} =$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(1 - \frac{4\varphi x\sqrt{-1} - xx}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{4\varphi x\sqrt{-1} - xx}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{4\varphi x\sqrt{-1} - xx}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - 4\varphi\varphi - 4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - 4\varphi\varphi + 4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\ &\quad \left(\frac{16\pi\pi - 4\varphi\varphi - 4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{16\pi\pi - 4\varphi\varphi + 4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\ &\quad \left(\frac{36\pi\pi - 4\varphi\varphi - 4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{36\pi\pi - 4\varphi\varphi + 4\varphi x\sqrt{-1} + xx}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - 4\varphi\varphi - 4\varphi x\sqrt{-1} - (x\sqrt{-1})^2}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - 4\varphi\varphi + 4\varphi x\sqrt{-1} - (x\sqrt{-1})^2}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\ &\quad \left(\frac{16\pi\pi - 4\varphi\varphi - 4\varphi x\sqrt{-1} - (x\sqrt{-1})^2}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{16\pi\pi - 4\varphi\varphi + 4\varphi x\sqrt{-1} - (x\sqrt{-1})^2}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\ &\quad \left(\frac{36\pi\pi - 4\varphi\varphi - 4\varphi x\sqrt{-1} - (x\sqrt{-1})^2}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{36\pi\pi - 4\varphi\varphi + 4\varphi x\sqrt{-1} - (x\sqrt{-1})^2}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - (2\varphi + x\sqrt{-1})^2}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{4\pi\pi - (2\varphi - x\sqrt{-1})^2}{4\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{16\pi\pi - (2\varphi + x\sqrt{-1})^2}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{16\pi\pi - (2\varphi - x\sqrt{-1})^2}{16\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{36\pi\pi - (2\varphi + x\sqrt{-1})^2}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{36\pi\pi - (2\varphi - x\sqrt{-1})^2}{36\pi\pi - 4\varphi\varphi}\right) \dots \\
 &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(\frac{2\pi - 2\varphi - x\sqrt{-1}}{2\pi - 2\varphi}\right) \left(\frac{2\pi + 2\varphi + x\sqrt{-1}}{2\pi + 2\varphi}\right) \left(\frac{2\pi - 2\varphi + x\sqrt{-1}}{2\pi - 2\varphi}\right) \left(\frac{2\pi + 2\varphi - x\sqrt{-1}}{2\pi + 2\varphi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{4\pi - 2\varphi - x\sqrt{-1}}{4\pi - 2\varphi}\right) \left(\frac{4\pi + 2\varphi + x\sqrt{-1}}{4\pi + 2\varphi}\right) \left(\frac{4\pi - 2\varphi + x\sqrt{-1}}{4\pi - 2\varphi}\right) \left(\frac{4\pi + 2\varphi - x\sqrt{-1}}{4\pi + 2\varphi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{6\pi - 2\varphi - x\sqrt{-1}}{6\pi - 2\varphi}\right) \left(\frac{6\pi + 2\varphi + x\sqrt{-1}}{6\pi + 2\varphi}\right) \left(\frac{6\pi - 2\varphi + x\sqrt{-1}}{6\pi - 2\varphi}\right) \left(\frac{6\pi + 2\varphi - x\sqrt{-1}}{6\pi + 2\varphi}\right) \dots \\
 &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{2\pi - 2\varphi}\right) \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{2\pi + 2\varphi}\right) \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{2\pi - 2\varphi}\right) \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{2\pi + 2\varphi}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{4\pi - 2\varphi}\right) \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{4\pi + 2\varphi}\right) \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{4\pi - 2\varphi}\right) \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{4\pi + 2\varphi}\right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{6\pi - 2\varphi}\right) \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{6\pi + 2\varphi}\right) \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{6\pi - 2\varphi}\right) \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{6\pi + 2\varphi}\right) \dots \\
 &= \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi + 2\varphi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{xx}{(4\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(4\pi + 2\varphi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{xx}{(6\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(6\pi + 2\varphi)^2}\right) \dots \text{q)}
 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
 \text{I. } e^x - 2\cos 2\varphi + e^{-x} &= 4\sin^2 \varphi \cdot \left(1 + \frac{xx}{4\varphi\varphi}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi + 2\varphi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{xx}{(4\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(4\pi + 2\varphi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{xx}{(6\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(6\pi + 2\varphi)^2}\right) \dots
 \end{aligned}$$

Man kann diese Function noch auf eine andere Art in Factoren auflösen. ^{r)} Es ist nämlich

q) Noch leichter wird dieser Ausdruck aus §. 47. IV. erhalten, wenn man $\psi = 2\varphi$ und $\varphi = \frac{x}{\sqrt{-1}}$ setzt, weil dann $\cos \varphi = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

r) M. f. des Herrn Professors L'Huillier mehrmals angeführte Abhandlung, am Ende.

$$\begin{aligned}
 e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x} &= e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x} \cdot (\sin 2\varphi^2 + \cos 2\varphi^2) \\
 &= (e^x)^2 - 2e^x \cdot e^{-x} \cdot \cos 2\varphi + (e^{-x} \cdot \cos 2\varphi)^2 + (e^{-x} \cdot \sin 2\varphi)^2 \\
 &= (e^x - e^{-x} \cdot \cos 2\varphi)^2 - (e^{-x} \cdot \sin 2\varphi \sqrt{-1})^2 \\
 &= (e^x - e^{-x} \cdot \cos 2\varphi - e^{-x} \cdot \sin 2\varphi \sqrt{-1})(e^x - e^{-x} \cdot \cos 2\varphi + e^{-x} \cdot \sin 2\varphi \sqrt{-1}) \\
 &= [e^x - e^{-x} \cdot (\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \sqrt{-1})][e^x - e^{-x} \cdot (\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \sqrt{-1})] \\
 &= (e^x - e^{-x} \cdot e^{2\varphi \sqrt{-1}})(e^x - e^{-x} \cdot e^{-2\varphi \sqrt{-1}}) \\
 &= (e^x - e^{-(x+2\varphi \sqrt{-1})})(e^x - e^{-(x-2\varphi \sqrt{-1})}) \\
 &= \left[(2x + 2\varphi \sqrt{-1}) \cdot e^{-\varphi \sqrt{-1}} \cdot \left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{4\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{9\pi\pi}\right) \dots \right] \\
 &\quad \left[(2x - 2\varphi \sqrt{-1}) \cdot e^{\varphi \sqrt{-1}} \cdot \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{4\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{9\pi\pi}\right) \dots \right] \\
 &= (4xx + 4\varphi\varphi) \left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{\pi\pi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{4\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{4\pi\pi}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{9\pi\pi}\right) \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{9\pi\pi}\right) \dots
 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
 \text{II. } e^{2x} - 2\cos 2\varphi + e^{-2x} &= 4(xx + \varphi\varphi) \left(\frac{xx + (\pi + \varphi)^2}{\pi\pi}\right) \left(\frac{xx + (\pi - \varphi)^2}{\pi\pi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{xx + (2\pi + \varphi)^2}{4\pi\pi}\right) \left(\frac{xx + (2\pi - \varphi)^2}{4\pi\pi}\right) \\
 &\quad \left(\frac{xx + (3\pi + \varphi)^2}{9\pi\pi}\right) \left(\frac{xx + (3\pi - \varphi)^2}{9\pi\pi}\right) \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{denn es ist überhaupt } &\left(1 + \frac{(x + \varphi \sqrt{-1})^2}{n^2\pi^2}\right) \left(1 + \frac{(x - \varphi \sqrt{-1})^2}{n^2\pi^2}\right) = 1 + 2 \left(\frac{x^2 + \varphi^2}{n^2\pi^2}\right) + \left(\frac{x^2 + \varphi^2}{n^2\pi^2}\right)^2 \\
 &= 1 + 2 \left(\frac{x^2 + \varphi^2 - 2\varphi^2}{n^2\pi^2}\right) + \left(\frac{x^2 + \varphi^2}{n^2\pi^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{x^2 + \varphi^2}{n^2\pi^2}\right)^2 - \frac{4\varphi^2}{n^2\pi^2} \\
 &= \left(\frac{x^2 + \varphi^2}{n^2\pi^2} + 1 + \frac{2\varphi}{n\pi}\right) \left(\frac{x^2 + \varphi^2}{n^2\pi^2} + 1 - \frac{2\varphi}{n\pi}\right) = \left(\frac{x^2 + (n\pi + \varphi)^2}{n^2\pi^2}\right) \left(\frac{x^2 + (n\pi - \varphi)^2}{n^2\pi^2}\right)
 \end{aligned}$$

III. Da $e^x + 2\cos 2\varphi + e^{-x} = e^x - 2\cos(\pi - 2\varphi) + e^{-x}$ ist, so ist

$$\begin{aligned}
 e^x + 2\cos 2\varphi + e^{-x} &= 4\cos \varphi^2 \cdot \left(1 + \frac{xx}{(\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(\pi + 2\varphi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{xx}{(3\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(3\pi + 2\varphi)^2}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{xx}{(5\pi - 2\varphi)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(5\pi + 2\varphi)^2}\right) \dots \quad (\text{I.})
 \end{aligned}$$

IV. Setzt man $\pi = 2p$, so erhält man aus II.:

$$e^{2x} + 2 \cos 2\phi + e^{-2x} = 4(x^2 + (p - \phi)^2) \left(\frac{x^2 + (p + \phi)^2}{4pp} \right) \left(\frac{x^2 + (3p - \phi)^2}{4pp} \right) \\ \left(\frac{x^2 + (3p + \phi)^2}{16pp} \right) \left(\frac{x^2 + (5p - \phi)^2}{16pp} \right) \\ \left(\frac{x^2 + (5p + \phi)^2}{36pp} \right) \left(\frac{x^2 + (7p - \phi)^2}{36pp} \right) \dots$$

V. Die Vergleichung der beiden Ausdrücke für $e^{2x} - 2 \cos 2\phi + e^{-2x}$ giebt das schon oben auf andere Art gefundene Product für $\sin \phi$, woraus der Wallis'sche Ausdruck für $\frac{\pi}{2}$ wie oben hergeleitet wird; mit Hülfe dieses Ausdrucks und der beiden Ausdrücke für $e^x + 2 \cos 2\phi + e^{-x}$ erhält man das ebenfalls schon oben gefundene Product für $\cos \phi$.

§. 50.

Setzt man $x = \pi z$, so erhält man aus §. 36.:

$$\text{I. } \frac{(1+z^2)(4+z^2)(9+z^2)(16+z^2)\dots}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \dots} = \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2\pi z}.$$

Für $x = \frac{\pi z}{2}$ giebt §. 37.:

$$\text{II. } \frac{(1+z^2)(9+z^2)(25+z^2)(49+z^2)\dots}{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \dots} = \frac{e^{\frac{\pi z}{2}} + e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2}.$$

Für $x = \frac{\pi z}{m}$ und $2p = \frac{\pi}{m}$ erhält man aus §. 49. I. III.:

$$\text{III. } \left(1 + \frac{z^2}{1}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(2m-1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(2m+1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(4m-1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(4m+1)^2}\right) \dots \\ = \frac{e^{\frac{\pi z}{m}} - 2 \cos \frac{\pi}{m} + e^{-\frac{\pi z}{m}}}{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)}, \text{ und}$$

$$\text{IV. } \left(1 + \frac{z^2}{(m-1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(m+1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(3m-1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(3m+1)^2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{(5m-1)^2}\right) \dots \\ = \frac{e^{\frac{\pi z}{m}} + 2 \cos \frac{\pi}{m} + e^{-\frac{\pi z}{m}}}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{m}\right)}. \text{ *)}$$

*) Man sehe des Herrn Hofraths *Pfaff Disquisitiones analyticae*. Helmst. 1797. 4. p. 65.

§. 51.

Ueber den Gebrauch der bisher bewiesenen Sätze bey verschiedenen analytischen Untersuchungen sehe man vorzüglich *Euler's Introductio in Analysin Infinitorum*, Tom. I. Cap. X. XI., die *Institutiones Calculi differentialis*, P. II. §. 41. seqq., und die *Institutiones Calculi integralis*, P. I. Sect. I. Cap. IX.; des Herrn Hofraths *Pfaff Disquisitiones analyticae*, pag. 65. — 132.; *Traité des différences et des séries*, par S. F. Lacroix, Paris 1819. 4. p. 439. seqq.; und *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques*, par Bertrand, Tom. II. à Genève 1778. 4. p. 548. — 576.

Dritter Abschnitt.

Summirung der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen.

§. 52.

Wenn man in §. 21. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. f. f., durch die Bernoulli'schen Zahlen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$, u. f. f., ausdrückt, so erhält man folgende Relationen dieser Zahlen:

$$0 = \frac{\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$0 = \frac{\mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} - \frac{\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 1 \cdot 5}$$

$$0 = \frac{\mathfrak{B}_3}{1 \cdot 6} - \frac{\mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 5} - \frac{5}{2 \cdot 1 \cdot 7}$$

$$0 = \frac{\mathfrak{B}_4}{1 \cdot 8} - \frac{\mathfrak{B}_3}{1 \cdot 6} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 5} - \frac{\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{7}{2 \cdot 1 \cdot 9}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

$$0 = \frac{\mathfrak{B}_n}{1 \cdot 2n} - \frac{\mathfrak{B}_{n-1}}{1 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\mathfrak{B}_{n-2}}{1 \cdot (2n-4)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 5} - \dots \pm \frac{\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \mp \frac{2n-1}{2 \cdot 1 \cdot (2n+1)}$$

§. 53.

Hieraus erhält man leicht

$$1) \quad 0 = \frac{2\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 0 &= \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} - \frac{2\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^2 \cdot 3}{1 \cdot 5} \\ &= \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} - \frac{2\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 5} \\ &\quad - \frac{2\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \\ &= \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} - \frac{2\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 5} \quad (1.). \end{aligned}$$

$$3) \quad 0 = \frac{2^5 \cdot \mathfrak{B}_3}{1 \cdot 6} - \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}_2}{1 \cdot 4} \cdot \frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2\mathfrak{B}_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^4}{1 \cdot 5} - \frac{2^4 \cdot 5}{1 \cdot 7}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^5 \cdot \mathfrak{B}^3}{1 \dots 6} - \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \dots 4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^1 \cdot \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \frac{3}{1 \dots 7} \\
 &\quad - \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \dots 4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2^1 \cdot \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2}{1 \dots 5} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \\
 &\quad + \frac{2^1 \cdot \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \dots 4} \\
 &= \frac{2^5 \cdot \mathfrak{B}^3}{1 \dots 6} - \frac{2^3 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \dots 4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^1 \cdot \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \frac{3}{1 \dots 7} \quad (1. 2.).
 \end{aligned}$$

4. Das Gesetz ist hier schon offenbar; es ist nämlich allgemein

$$0 = \frac{2^{2n-1} \cdot \mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n} - \frac{2^{2n-3} \cdot \mathfrak{B}^{n-1}}{1 \dots (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^{2n-5} \cdot \mathfrak{B}^{n-2}}{1 \dots (2n-4)} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \dots \pm \frac{2^1 \cdot \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots (2n-1)} \mp \frac{n}{1 \dots (2n+1)}.$$

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu beweisen, nehme man an, daß es bis n gelte, so läßt sich auf folgende Art zeigen, daß es auch für $n+1$ gelten muß:

a. Wenn wir die Hindenburgische Bezeichnung der Binomial-Coefficienten gebrauchen, so ist nach dem binomischen Lehrsätze

$$\begin{aligned}
 2^{2m+1} &= (1+1)^{2m+1} = 1 + {}^{2m+1}\mathfrak{A} + {}^{2m+1}\mathfrak{B} + {}^{2m+1}\mathfrak{C} + \dots + {}^{2m+1}\mathfrak{M} + {}^{2m+1}\mathfrak{N} \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &({}^{2m+1}\mathfrak{A} + {}^{2m+1}\mathfrak{C} + {}^{2m+1}\mathfrak{E} + \dots + {}^{2m+1}\mathfrak{M} + {}^{2m+1}\mathfrak{N}) \\ &+ (1 + {}^{2m+1}\mathfrak{B} + {}^{2m+1}\mathfrak{D} + \dots + {}^{2m+1}\mathfrak{L} + {}^{2m+1}\mathfrak{K}) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
 1 &= {}^{2m+1}\mathfrak{N}, \text{ da } 0+2m+1=2m+1, \\
 {}^{2m+1}\mathfrak{B} &= {}^{2m+1}\mathfrak{M}, \text{ da } 2+2m-1=2m+1, \\
 {}^{2m+1}\mathfrak{D} &= {}^{2m+1}\mathfrak{L}, \text{ da } 4+2m-3=2m+1, \\
 &\quad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

$${}^{2m+1}\mathfrak{L} = {}^{2m+1}\mathfrak{C}, \text{ da } 2m-2+3=2m+1,$$

$${}^{2m+1}\mathfrak{M} = {}^{2m+1}\mathfrak{A}, \text{ da } 2m+1 = 2m+1.$$

$$\text{Also } 2^{2m} = 1 + {}^{2m+1}\mathfrak{B} + {}^{2m+1}\mathfrak{D} + {}^{2m+1}\mathfrak{F} + \dots + {}^{2m+1}\mathfrak{N} + {}^{2m+1}\mathfrak{K}$$

$$\frac{2^{2m}}{1 \dots (2m+1)} = \frac{1}{1 \dots (2m+1)} + \frac{1}{1 \dots (2m-1) \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \dots (2m-3) \cdot 1 \dots 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \dots (2m-2)} + \frac{1}{1 \dots 2m}$$

$$\text{da } \frac{{}^{2m+1}\mathfrak{K}}{1 \dots (2m+1)} = \frac{(2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \dots (2m-n+2)}{1 \dots n \cdot 1 \dots (2m+1)} = \frac{1}{1 \dots (2m-n+1) \cdot 1 \dots n}.$$

b. Die Summe der Reihe

$$(m+1) \cdot 1 + m \cdot {}^{2m+3}\mathfrak{B} + (m-1) \cdot {}^{2m+3}\mathfrak{D} + (m-2) \cdot {}^{2m+3}\mathfrak{F} + \dots + 2 \cdot {}^{2m+3}\mathfrak{N} + 1 \cdot {}^{2m+3}\mathfrak{K} \text{ sey } = S,$$

so ist nach der Theorie der Binomial-Coefficienten:

$$\begin{aligned}
 S &= (m+1) \cdot 1 + m \cdot 2^{m+2} \mathfrak{B} + (m-1) \cdot 2^{m+2} \mathfrak{D} + (m-2) \cdot 2^{m+2} \mathfrak{F} + \dots + 2 \cdot 2^{m+2} \mathfrak{M}^{m-2} + 1 \cdot 2^{m+2} \mathfrak{M}^m \\
 &\quad + m \cdot 2^{m+2} \mathfrak{A} + (m-1) \cdot 2^{m+2} \mathfrak{C} + (m-2) \cdot 2^{m+2} \mathfrak{E} + \dots + 2 \cdot 2^{m+2} \mathfrak{M}^{m-3} + 1 \cdot 2^{m+2} \mathfrak{M}^{m-1} \\
 &= (m+1) \cdot 1 + m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{B} + (m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{D} + (m-2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{F} + \dots + 2 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-2} + 1 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^m \\
 &\quad + m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{A} + (m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{C} + (m-2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{E} + \dots + 2 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-3} + 1 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-1} \\
 &\quad + m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{A} + (m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{C} + (m-2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{E} + \dots + 2 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-3} + 1 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-1} \\
 &\quad + m + (m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{B} + (m-2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{D} + \dots + 2 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-4} + 1 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-2} \\
 &= (2m+1) \cdot 1 + (2m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{B} + (2m-3) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{D} + (2m-5) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{F} + \dots + 3 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-2} + 1 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^m \\
 &\quad + 2m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{A} + (2m-2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{C} + (2m-4) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{E} + \dots + 4 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-3} + 2 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-1}
 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
 (2m-n+1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M} + (2m-n+2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}^{-1} &= (2m-n+1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M} + (2m-n+2) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M} \cdot \frac{n}{2m-n+2} \\
 &= (2m-n+1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M} + n \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M} = (2m+1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{M}; \text{ also}
 \end{aligned}$$

$$S = (2m+1) \left(1 + 2^{m+1} \mathfrak{B} + 2^{m+1} \mathfrak{D} + 2^{m+1} \mathfrak{F} + \dots + 2^{m+1} \mathfrak{M}^{m-2} + 2^{m+1} \mathfrak{M}^m \right) = (2m+1) \cdot 2^{2m} \quad (\text{a.})$$

oder

$$\begin{aligned}
 \frac{(2m+1) \cdot 2^{2m}}{1 \cdot (2m+3)} &= \frac{(m+1) \cdot 1}{1 \cdot (2m+3)} + \frac{m}{1 \cdot (2m+1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{m-1}{1 \cdot (2m-1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{m-2}{1 \cdot (2m-3)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 6} \\
 &\quad + \dots + \frac{2}{1 \cdot 5} \cdot \frac{1}{1 \cdot (2m-2)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2m}.
 \end{aligned}$$

c. Es ist aber nach §. 52.:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{2^{n+1} \cdot \mathfrak{B}^{n+1}}{1 \cdot (2n+2)} - \frac{2^n \cdot \mathfrak{B}^n}{1 \cdot 2n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^{n-1} \cdot \mathfrak{B}^{n-1}}{1 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 5} - \dots \mp \frac{2 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot (2n+1)} \pm \frac{2n+1}{2 \cdot 1 \cdot (2n+3)} \\
 &= \frac{2^{2n+1} \cdot \mathfrak{B}^{n+1}}{1 \cdot (2n+2)} - \frac{2^{2n-1} \cdot \mathfrak{B}^n}{1 \cdot 2n} \cdot \frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^{2n-3} \cdot \mathfrak{B}^{n-1}}{1 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{2^4}{1 \cdot 5} - \dots \mp \frac{2 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^{2n}}{1 \cdot (2n+1)} \pm \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n}}{1 \cdot (2n+3)} \\
 &= \frac{2^{2n+1} \cdot \mathfrak{B}^{n+1}}{1 \cdot (2n+2)} - \frac{2^{2n-1} \cdot \mathfrak{B}^n}{1 \cdot 2n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^{2n-3} \cdot \mathfrak{B}^{n-1}}{1 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 5} - \dots \mp \frac{2 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot (2n+1)} \pm \frac{n+1}{1 \cdot (2n+3)} \\
 &\quad - \frac{2^{2n-1} \cdot \mathfrak{B}^n}{1 \cdot 2n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2^{2n-3} \cdot \mathfrak{B}^{n-1}}{1 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} - \dots \mp \frac{2 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \pm \frac{n}{1 \cdot (2n+1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \\
 &\quad + \frac{2^{2n-3} \cdot \mathfrak{B}^{n-1}}{1 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 4} - \dots \mp \frac{2 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot (2n-3)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 4} \pm \frac{n-1}{1 \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 4} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \mp \frac{2 \cdot \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2n} \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2n}
 \end{aligned}$$

nach a. und b.

Da nun das bemerkte Gesetz bis n gelten soll, so ist

$$0 = \frac{2^{2n+1} \cdot \overset{n+1}{\mathfrak{B}}}{1 \dots (2n+2)} - \frac{2^{2n-1} \cdot \overset{n}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 2n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^{2n-3} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{B}}}{1 \dots (2n-2)} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \frac{2^{2n-5} \cdot \overset{n-2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots (2n-4)} \cdot \frac{1}{1 \dots 7} + \dots$$

$$\dots \mp \frac{2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots (2n+1)} \pm \frac{n+1}{1 \dots (2n+3)}$$

so daß also das Gesetz auch für $n+1$ gilt, und also allgemein ist.

§. 54.

Es ist also

$$0 = \frac{2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$0 = \frac{2^3 \cdot \overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4} - \frac{2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{1 \dots 5}$$

$$0 = \frac{2^5 \cdot \overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6} - \frac{2^3 \cdot \overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \frac{3}{1 \dots 7}$$

$$0 = \frac{2^7 \cdot \overset{4}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 8} - \frac{2^5 \cdot \overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^3 \cdot \overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \frac{2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots 7} + \frac{4}{1 \dots 9}$$

u. f. f. u. f. f.

Dividirt man aber die Gleichungen in §. 35. nach der Reihe durch π^2, π^4, π^6 , u. f. f., so erhält man

$$0 = \pi^{-2} \sum \frac{1}{y^2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$0 = \pi^{-4} \sum \frac{1}{y^4} - \pi^{-2} \sum \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{1 \dots 5}$$

$$0 = \pi^{-6} \sum \frac{1}{y^6} - \pi^{-4} \sum \frac{1}{y^4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \pi^{-2} \sum \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \frac{3}{1 \dots 7}$$

$$0 = \pi^{-8} \sum \frac{1}{y^8} - \pi^{-6} \sum \frac{1}{y^6} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \pi^{-4} \sum \frac{1}{y^4} \cdot \frac{1}{1 \dots 5} - \pi^{-2} \sum \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{1 \dots 7} + \frac{4}{1 \dots 9}$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

Aus der Vergleichung dieser beiden Reihen von Gleichungen ergibt sich folgende, daß

$$\pi^{-2} \sum \frac{1}{y^2} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2}, \quad \sum \frac{1}{y^2} = \frac{2 \pi^2 \cdot \overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\pi^{-4} \sum \frac{1}{y^4} = \frac{2^3 \cdot \overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4}, \quad \sum \frac{1}{y^4} = \frac{2^3 \cdot \pi^4 \cdot \overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

$$\pi^{-6} \sum \frac{1}{y^6} = \frac{2^5 \cdot \overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6}, \quad \sum \frac{1}{y^6} = \frac{2^5 \cdot \pi^6 \cdot \overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots$$

$$\pi^{-8} \sum \frac{1}{y^8} = \frac{2^7 \cdot \mathfrak{B}^4}{1 \dots 8}, \quad \sum \frac{1}{y^8} = \frac{2^7 \cdot \pi^8 \mathfrak{B}^4}{1 \dots 8} = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots$$

u. f. f. u. f. f.

$$\pi^{-2n} \sum \frac{1}{y^{2n}} = \frac{2^{2n-1} \cdot \mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n}, \quad \sum \frac{1}{y^{2n}} = \frac{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n} \mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots$$

Die Werthe dieser Summen giebt *Euler* in den *Instit. Calculi different.* P. II. §. 152.

§. 55.

1. Da $\frac{1}{2^{2n}} \sum \frac{1}{y^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \dots$, so ist

$$\frac{\mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

$$\frac{\mathfrak{B}^2}{1 \dots 4} \cdot \frac{\pi^4}{2} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \dots$$

$$\frac{\mathfrak{B}^3}{1 \dots 6} \cdot \frac{\pi^6}{2} = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \dots$$

$$\frac{\mathfrak{B}^4}{1 \dots 8} \cdot \frac{\pi^8}{2} = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \dots$$

u. f. f. u. f. f.

$$\frac{\mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n} \cdot \frac{\pi^{2n}}{2} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \dots$$

Die Näherungswerthe bis zum vier und zwanzigsten in drey und zwanzig Decimalstellen findet man in der *Introd. in Anal. Infin.* I. §. 193.

2. Sey

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots = \sum \frac{1}{y^{2n}}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \dots = S, \text{ so ist}$$

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots = \sum \frac{1}{y^{2n}} - S = S',$$

$$S' = \frac{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n} \mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n} - \frac{\mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n} \cdot \frac{\pi^{2n}}{2} = \frac{(4^n - 1) \mathfrak{B}^n}{1 \dots 2n} \cdot \frac{\pi^{2n}}{2}.$$

Also

$$\frac{(4-1) \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\pi^2}{2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$\frac{(4^2-1)\overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4} \cdot \frac{\pi^4}{2} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

$$\frac{(4^3-1)\overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6} \cdot \frac{\pi^6}{2} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots$$

$$\frac{(4^4-1)\overset{4}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 8} \cdot \frac{\pi^8}{2} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \dots$$

u. f. f.

u. f. f.

$$\frac{(4^n-1)\overset{n}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 2n} \cdot \frac{\pi^{2n}}{2} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots$$

Die Näherungswerthe bis zum zwey und zwanzigsten in drey und zwanzig Decimalen enthält die *Introd. in Anal. Infin.* I. §. 190.

3. In §. 52. II. haben wir gesehen, daß

$$\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n}} = \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}-1} \Sigma \frac{1}{y^{2n}}; \text{ es ist}$$

$$\text{also } 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = \frac{(2-1)\pi^2\overset{1}{\mathfrak{B}}}{1 \cdot 2},$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \dots = \frac{(2^3-1)\pi^4\overset{2}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 4},$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \dots = \frac{(2^5-1)\pi^6\overset{3}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 6},$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \dots = \frac{(2^7-1)\pi^8\overset{4}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 8},$$

u. f. f.

u. f. f.

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \dots = \frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}\overset{n}{\mathfrak{B}}}{1 \dots 2n}.$$

4. Die Summe der reciproken ungeraden Potenzen, d. i. die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} + \frac{1}{4^{2n-1}} + \dots, \text{ ist noch zu finden.}$$

Die Summe der Reihe $1 - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{4^{2n-1}} + \dots$ findet *Euler* in den *Instit.*

Calculi different. P. II. §. 226. auf folgende Art:

In §. 38. setze man πx für φ , so erhält man

$$\sin \pi x = \pi x \left(\frac{1-x}{1} \right) \left(\frac{1+x}{1} \right) \left(\frac{2-x}{2} \right) \left(\frac{2+x}{2} \right) \left(\frac{3-x}{3} \right) \left(\frac{3+x}{3} \right) \dots$$

$$\cos \pi x = \left(\frac{1-2x}{1} \right) \left(\frac{1+2x}{1} \right) \left(\frac{3-2x}{3} \right) \left(\frac{3+2x}{3} \right) \left(\frac{5-2x}{5} \right) \left(\frac{5+2x}{5} \right) \dots$$

$$\text{Log Sin } \pi x = \text{Log } \pi x + \text{Log} \left(\frac{1-x}{1} \right) + \text{Log} \left(\frac{1+x}{1} \right) + \text{Log} \left(\frac{2-x}{2} \right) + \text{Log} \left(\frac{2+x}{2} \right) + \dots$$

$$\text{Log Cos } \pi x = \text{Log} \left(\frac{1-2x}{1} \right) + \text{Log} \left(\frac{1+2x}{1} \right) + \text{Log} \left(\frac{3-2x}{3} \right) + \text{Log} \left(\frac{3+2x}{3} \right) + \dots$$

Also, wenn man differenziert:

$$\frac{\pi \text{Cos } \pi x}{\text{Sin } \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} - \dots$$

$$\frac{\pi \text{Sin } \pi x}{2 \text{Cos } \pi x} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3-2x} - \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5-2x} - \frac{1}{5+2x} + \dots$$

und wenn man in letzterer Gleichung $\frac{1}{2}x$ für x setzt:

$$\frac{\pi \text{Sin } \frac{1}{2} \pi x}{\text{Cos } \frac{1}{2} \pi x} = \frac{\pi \sqrt{1-\text{Cos } \pi x}}{\sqrt{1+\text{Cos } \pi x}} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \dots$$

Dies zu der Reihe für $\frac{\pi \text{Cos } \pi x}{\text{Sin } \pi x}$ addirt giebt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4-x} + \dots \\ &= \frac{\pi \text{Cos } \pi x}{\text{Sin } \pi x} + \frac{\pi \sqrt{1-\text{Cos } \pi x}}{\sqrt{1+\text{Cos } \pi x}} = \frac{\pi \text{Cos } \pi x}{\text{Sin } \pi x} + \frac{\pi(1-\text{Cos } \pi x)}{\text{Sin } \pi x} = \frac{\pi}{\text{Sin } \pi x}. \end{aligned}$$

Also für $x = \frac{m}{n}$:

$$\frac{\pi}{n \text{Sin } \frac{m}{n} \pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \dots$$

und für $\frac{m}{n} \pi = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}$, also $\text{Sin } \frac{m\pi}{n} = \text{Cos } \frac{k\pi}{n}$:

$$\frac{\pi}{n \text{Cos } \frac{k}{n} \pi} = \frac{2}{n-2k} + \frac{2}{n+2k} - \frac{2}{3n-2k} - \frac{2}{3n+2k} + \frac{2}{5n-2k} + \frac{2}{5n+2k} - \dots$$

$$\frac{\pi}{2n \text{Cos } x} = \frac{\pi}{n\pi-2nx} + \frac{\pi}{n\pi+2nx} - \frac{\pi}{3n\pi-2nx} - \frac{\pi}{3n\pi+2nx} + \frac{\pi}{5n\pi-2nx} + \dots$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Cos } x} = \text{Sec } x &= \frac{2}{\pi-2x} + \frac{2}{\pi+2x} - \frac{2}{3\pi-2x} - \frac{2}{3\pi+2x} + \frac{2}{5\pi-2x} + \dots \\ &= \frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} - \frac{4 \cdot 3\pi}{9\pi^2-4x^2} + \frac{4 \cdot 5\pi}{25\pi^2-4x^2} - \frac{4 \cdot 7\pi}{49\pi^2-4x^2} + \frac{4 \cdot 9\pi}{81\pi^2-4x^2} + \dots \end{aligned}$$

Entwickelt man nun die einzelnen Theile dieser Reihe in Reihen, so wird

$$\text{Sec } x = 4\pi \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{2^2 \cdot x^2}{\pi^4} + \frac{2^4 \cdot x^4}{\pi^6} + \frac{2^6 \cdot x^6}{\pi^8} + \frac{2^8 \cdot x^8}{\pi^{10}} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
& -4 \cdot 3\pi \left(\frac{1}{9\pi^2} + \frac{2^2 \cdot x^2}{9^2 \cdot \pi^4} + \frac{2^4 \cdot x^4}{9^3 \cdot \pi^6} + \frac{2^6 \cdot x^6}{9^4 \cdot \pi^8} + \frac{2^8 \cdot x^8}{9^5 \cdot \pi^{10}} + \dots \right) \\
& + 4 \cdot 5\pi \left(\frac{1}{25\pi^2} + \frac{2^2 \cdot x^2}{25^2 \cdot \pi^4} + \frac{2^4 \cdot x^4}{25^3 \cdot \pi^6} + \frac{2^6 \cdot x^6}{25^4 \cdot \pi^8} + \frac{2^8 \cdot x^8}{25^5 \cdot \pi^{10}} + \dots \right) \\
& - 4 \cdot 7\pi \left(\frac{1}{49\pi^2} + \frac{2^2 \cdot x^2}{49^2 \cdot \pi^4} + \frac{2^4 \cdot x^4}{49^3 \cdot \pi^6} + \frac{2^6 \cdot x^6}{49^4 \cdot \pi^8} + \frac{2^8 \cdot x^8}{49^5 \cdot \pi^{10}} + \dots \right) \\
& + \text{u. f. f.} \\
& = \frac{2^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \\
& - \frac{2^4 \cdot x^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right) \\
& + \frac{2^6 \cdot x^4}{\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots \right) \\
& - \frac{2^8 \cdot x^6}{\pi^7} \left(1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \dots \right) \\
& + \text{u. f. f.}
\end{aligned}$$

Es ist aber $\sec x = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6 + \epsilon x^8 + \dots$;

$$\text{also } \frac{2^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \alpha,$$

$$\frac{2^4}{\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right) = \beta,$$

$$\frac{2^6}{\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots \right) = \gamma,$$

$$\frac{2^8}{\pi^7} \left(1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \dots \right) = \delta,$$

u. f. f. u. f. f.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi \alpha}{2^2},$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3 \beta}{2^4},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots = \frac{\pi^5 \gamma}{2^6},$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \dots = \frac{\pi^7 \delta}{2^8},$$

u. f. f. u. f. f.

Die Gleichungen, aus welchen α , β , γ , δ , u. f. f., bestimmt werden, findet man in §. 27.

Anhang.

Euler hat in den *Opusculis analyticis*, Tom. I., in der Abhandlung: *Variae observationes circa angulos in progressionem geometricam progredientes*, einige Formeln bewiesen, durch welche die Bögen durch ihre trigonometrischen Linien als Producte mit unendlich vielen Factoren ausgedrückt werden. Die Beweise dieser Formeln beruhen alle auf dem Begriffe des Unendlichen. Ich werde in diesem Anhang zeigen, wie sich die eine dieser Formeln, die man auch schon in einer frühern Abhandlung *Euler's: De variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi*, (Comm. Petrop. T. IX. 1737.), findet, ohne diesen Begriff zu gebrauchen, beweisen läßt.

Es ist nämlich

$$\text{Tg } y = \frac{2^2(2^2-1)\text{B}y}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)\text{B}y^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)\text{B}y^5}{1..6} + \dots,$$

also

$$\frac{1}{2} \text{Tg } \frac{1}{2} x = \frac{(2^2-1)\text{B}x}{1.2} + \frac{(2^4-1)\text{B}x^3}{1..4} + \frac{(2^6-1)\text{B}x^5}{1..6} + \dots$$

$$\frac{1}{4} \text{Tg } \frac{1}{4} x = \frac{(2^2-1)\text{B}x}{2^2.1.2} + \frac{(2^4-1)\text{B}x^3}{2^4.1..4} + \frac{(2^6-1)\text{B}x^5}{2^6.1..6} + \dots$$

$$\frac{1}{8} \text{Tg } \frac{1}{8} x = \frac{(2^2-1)\text{B}x}{2^4.1.2} + \frac{(2^4-1)\text{B}x^3}{2^8.1..4} + \frac{(2^6-1)\text{B}x^5}{2^{12}.1..6} + \dots$$

$$\frac{1}{16} \text{Tg } \frac{1}{16} x = \frac{(2^2-1)\text{B}x}{2^6.1.2} + \frac{(2^4-1)\text{B}x^3}{2^{12}.1..4} + \frac{(2^6-1)\text{B}x^5}{2^{18}.1..6} + \dots$$

u. f. f.

u. f. f.

$$\text{Also } \frac{1}{2} \text{Tg } \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \text{Tg } \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \text{Tg } \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \text{Tg } \frac{1}{16} x + \dots =$$

$$= \frac{2^2.\text{B}x}{1.2} + \frac{2^4.\text{B}x^3}{1..4} + \frac{2^6.\text{B}x^5}{1..6} + \frac{2^8.\text{B}x^7}{1..8} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} - \text{Cotg } x \quad (\S. 21.). \quad \text{Also}$$

$$\text{Cotg } x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{Tg } \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \text{Tg } \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \text{Tg } \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \text{Tg } \frac{1}{16} x - \dots$$

$$\frac{\text{Cos } x . dx}{\text{Sin } x} = \frac{dx}{x} - \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} x . dx}{2 \text{Cos } \frac{1}{2} x} - \frac{\text{Sin } \frac{1}{4} x . dx}{4 \text{Cos } \frac{1}{4} x} - \frac{\text{Sin } \frac{1}{8} x . dx}{8 \text{Cos } \frac{1}{8} x} - \dots$$

$$\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin \frac{1}{2} x \cdot dx}{2 \cos \frac{1}{2} x} - \int \frac{\sin \frac{1}{4} x \cdot dx}{4 \cos \frac{1}{4} x} - \int \frac{\sin \frac{1}{8} x \cdot dx}{8 \cos \frac{1}{8} x} - \dots$$

$$\log \sin x = \log x + \log \cos \frac{1}{2} x + \log \cos \frac{1}{4} x + \log \cos \frac{1}{8} x + \log \cos \frac{1}{16} x + \dots + \text{Const.}$$

Für $x=0$ ist $\sin x=0$, also $\log \sin x = \log x$, also $0 = \log \cos \frac{1}{2} x + \log \cos \frac{1}{4} x + \dots + \text{Const.}$, also $\text{Const.} = 0$, da $\log \cos \frac{1}{2} x = \log \cos \frac{1}{4} x = \dots = \log 1 = 0$.
Also

$$\log \sin x = \log x + \log \cos \frac{1}{2} x + \log \cos \frac{1}{4} x + \log \cos \frac{1}{8} x + \log \cos \frac{1}{16} x + \dots$$

$$= \log \left(x \cos \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{4} x \cdot \cos \frac{1}{8} x \cdot \cos \frac{1}{16} x \dots \right),$$

$$\sin x = x \cos \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{4} x \cdot \cos \frac{1}{8} x \cdot \cos \frac{1}{16} x \dots$$

$$x = \frac{\sin x}{\cos \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{4} x \cdot \cos \frac{1}{8} x \cdot \cos \frac{1}{16} x \dots}$$

$$= \sin x \cdot \sec \frac{1}{2} x \cdot \sec \frac{1}{4} x \cdot \sec \frac{1}{8} x \cdot \sec \frac{1}{16} x \dots$$

Der von *Vieta* gefundene Ausdruck für den Inhalt des Kreises (m. f. *Klügel's Wörterbuch*, II. S. 606.) ist eine leichte Folgerung aus diesem Satze.

Einige Bemerkungen

über

die Reihe $n^m - \frac{n}{1} (n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (n-3)^m + \dots$

Folgendes die Art erkennen nicht selten, vorzüglich in der Thatung der entlichen
 Eilern, die Coelomien anderer Arten, und mögen daher wohl nicht ganz die
 in Winckler'schen System, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern angesehen werden, da sie in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist,
 in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen

Die Blom'sche Coelomien, welche nach der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist,
 in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen

Die Blom'sche Coelomien, welche nach der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist,
 in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen

Die Blom'sche Coelomien, welche nach der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist,
 in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen

Die Blom'sche Coelomien, welche nach der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist,
 in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen
 Eilern, welche, in der Thatung der entlichen Eilern, wie das ist, als eine Art der Thatung der entlichen

§. 1.

Reihen dieser Art erscheinen nicht selten, vorzüglich in der Rechnung mit endlichen Differenzen, als Coefficienten anderer Reihen, und mögen daher wohl nicht ganz ohne Wichtigkeit seyn; auch hat schon *Euler* ihre nähere Betrachtung den Mathematikern empfohlen, in der Abhandlung: *De curva hypergeometrica*. (*Novi Comment. Petrop.* Tom. XIII.) Ich habe hierin Veranlassung gefunden, einige Sätze über diese Reihen, welche, so viel mir bekannt ist, anderswo noch nicht vorkommen, hier mitzutheilen.

§. 2.

1. Die Binomial-Coefficienten werde ich immer nach der Hindenburgischen Bezeichnungsart ausdrücken; die meisten Relationen derselben, welche hier gebraucht werden, findet man in *Klügel's Wörterbuche*, Th. I. Art. Binomial-Coefficient, auf welches daher hier ein- für allemal verwiesen wird.

2. Die Reihe

$$n^m - \frac{n}{1} (n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-3)^m + \dots \text{ oder}$$

$$n^m - {}^n\mathcal{A}(n-1)^m + {}^n\mathcal{B}(n-2)^m - {}^n\mathcal{C}(n-3)^m + {}^n\mathcal{D}(n-4)^m - \dots$$

werde ich durch $\overset{m}{N}$ bezeichnen; n mag die Grundzahl oder die Basis, m der Exponent der Reihe genannt werden. Die den positiven ganzen Grundzahlen 1, 2, 3, 4, 5, u. f. w. entsprechenden Reihen sollen nach der Ordnung durch $\overset{m}{A}, \overset{m}{B}, \overset{m}{C}, \overset{m}{D}, \overset{m}{E}$, u. f. w. bezeichnet werden, so daß also

$$\overset{m}{A} = 1^m,$$

$$\overset{m}{B} = 2^m - 2 \cdot 1^m,$$

$$\overset{m}{C} = 3^m - 3 \cdot 2^m + 3 \cdot 1^m,$$

$$\overset{m}{D} = 4^m - 4 \cdot 3^m + 6 \cdot 2^m - 4 \cdot 1^m,$$

$$\overset{m}{E} = 5^m - 5 \cdot 4^m + 10 \cdot 3^m - 10 \cdot 2^m + 5 \cdot 1^m,$$

u. f. f.

u. f. f.

Ist die Basis zusammengesetzt, z. B. $= n \pm k$, so soll die entsprechende Reihe durch $[N \pm k]^m$ angedeutet werden, so daß z. B. die Reihe, deren Basis $= 0 = 1 - 1$, durch $[A - 1]^m$ bezeichnet werden kann.

§. 3.

Es ist $\bar{N} = n \{ [N - 1] + \bar{N} \}$ für jedes n und m .

Beweis.

$$\begin{aligned} \bar{N} &= n^{m-1} - {}^n\mathfrak{A}(n-1)^{m-1} + {}^n\mathfrak{B}(n-2)^{m-1} - {}^n\mathfrak{C}(n-3)^{m-1} + \text{u. f. f.} \\ [N - 1] &= (n-1)^{m-1} - {}^{n-1}\mathfrak{A}(n-2)^{m-1} + {}^{n-1}\mathfrak{B}(n-3)^{m-1} - \text{u. f. f.} \\ [N - 1] + \bar{N} &= n^{m-1} - \{ {}^n\mathfrak{A} - 1 \} (n-1)^{m-1} = n^{m-1} - {}^{n-1}\mathfrak{A}(n-1)^{m-1} \\ &\quad + \{ {}^n\mathfrak{B} - {}^{n-1}\mathfrak{A} \} (n-2)^{m-1} \quad + {}^{n-1}\mathfrak{B}(n-2)^{m-1} \\ &\quad - \{ {}^n\mathfrak{C} - {}^{n-1}\mathfrak{B} \} (n-3)^{m-1} \quad - {}^{n-1}\mathfrak{C}(n-3)^{m-1} \\ &\quad + \text{u. f. f.} \quad + \text{u. f. f.} \\ &= n^{m-1} - {}^{n-1}\mathfrak{A} \cdot \frac{n-1}{1} (n-1)^{m-1} = n^{m-1} - {}^{n-1}\mathfrak{A} \cdot \frac{1}{1} (n-1)^m \\ &\quad + {}^{n-1}\mathfrak{A} \cdot \frac{n-2}{2} (n-2)^{m-1} \quad + {}^{n-1}\mathfrak{A} \cdot \frac{1}{2} (n-2)^m \\ &\quad - {}^{n-1}\mathfrak{B} \cdot \frac{n-3}{3} (n-3)^{m-1} \quad - {}^{n-1}\mathfrak{B} \cdot \frac{1}{3} (n-3)^m \\ &\quad + \text{u. f. f.} \quad + \text{u. f. f.} \\ n \{ [N - 1] + \bar{N} \} &= n^m - {}^{n-1}\mathfrak{A} \cdot \frac{n}{1} (n-1)^m = n^m - {}^n\mathfrak{A}(n-1)^m = \bar{N} \\ &\quad + {}^{n-1}\mathfrak{A} \cdot \frac{n}{2} (n-2)^m \quad + {}^n\mathfrak{B}(n-2)^m \\ &\quad - {}^{n-1}\mathfrak{B} \cdot \frac{n}{3} (n-3)^m \quad - {}^n\mathfrak{C}(n-3)^m \\ &\quad + \text{u. f. f.} \quad + \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

§. 4.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man leicht eine Tafel der Reihen $\bar{N}$ für positive ganze Grundzahlen und Exponenten construiren, die in manchen Fällen von Nutzen seyn kann. Ich gebe hier bloß den Anfang einer solchen Tafel:

		m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	0	0	2	6	14	30	62	126	254
	3	0	0	0	6	36	150	540	1806	5796
	4	0	0	0	0	24	240	1560	8400	40824
	5	0	0	0	0	0	120	1800	16800	126000
	6	0	0	0	0	0	0	720	15120	191520
	7	0	0	0	0	0	0	0	5040	141120

Die Art der Verfertigung der Tafel wird leicht aus nachstehendem Beyspiel für den Exponenten 6 erhellen. Die siebente Verticalreihe wird nämlich aus der sechsten auf folgende Art nach §. 3. gefunden: $1 = 1 \cdot (0 + 1)$, $62 = 2 \cdot (1 + 30)$, $540 = 3 \cdot (30 + 150)$, $1560 = 4 \cdot (150 + 240)$, $1800 = 5 \cdot (240 + 120)$, $720 = 6 \cdot (120 + 0)$, und nun folgen lauter Nullen.

Anmerkung. Die Zahlen in der ersten horizontalen und verticalen Reihe sind, die erste ausgenommen, alle $= 0$. Denn es ist

$$1) [A - 1] = 0^m - {}^0\mathfrak{A}(-1)^m + {}^0\mathfrak{B}(-2)^m - \text{u. f. f.} = 0^m: \text{also} = 1, \text{ wenn } m = 0; = 0, \text{ wenn } m > 0; \text{ und } = \infty, \text{ wenn } m < 0.$$

$$2) \dot{N} = n^0 - {}^n\mathfrak{A}(n-1)^0 + {}^n\mathfrak{B}(n-2)^0 - \text{u. f. f.} \\ = 1 - {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B} - {}^n\mathfrak{C} + \text{u. f. f.} = 0^n.$$

Für $n = 0$ ist also $\dot{N} = 1$, für $n > 0$ ist $\dot{N} = 0$, und für $n < 0$ ist $\dot{N} = \infty$.

§. 5.

Nach §. 3. ist

$$\begin{aligned} {}^m\dot{N} &= n {}^{m-1}\dot{N} + n [{}^{m-1}\dot{N} - 1] \\ &= n \{ n {}^{m-2}\dot{N} + n [{}^{m-2}\dot{N} - 1] \} + n [{}^{m-1}\dot{N} - 1] \\ &= n^2 {}^{m-2}\dot{N} + n^2 [{}^{m-2}\dot{N} - 1] + n [{}^{m-1}\dot{N} - 1] \\ &= n^2 \{ n {}^{m-3}\dot{N} + n [{}^{m-3}\dot{N} - 1] \} + n^2 [{}^{m-2}\dot{N} - 1] + n [{}^{m-1}\dot{N} - 1] \\ &= n^3 {}^{m-3}\dot{N} + n^3 [{}^{m-3}\dot{N} - 1] + n^2 [{}^{m-2}\dot{N} - 1] + n [{}^{m-1}\dot{N} - 1] \\ &\quad \text{u. f. f.} \quad \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

$$= n^k \overset{m-k}{N} + n^k [\overset{m-k}{N} - 1] + n^{k-1} [\overset{m-k+1}{N} - 1] + n^{k-2} [\overset{m-k+2}{N} - 1] + \dots + n^2 [\overset{m-2}{N} - 1] + n [\overset{m-1}{N} - 1]$$

$$\overset{m}{N} - n^k \overset{m-k}{N} = n^k [\overset{m-k}{N} - 1] + n^{k-1} [\overset{m-k+1}{N} - 1] + n^{k-2} [\overset{m-k+2}{N} - 1] + \dots + n^2 [\overset{m-2}{N} - 1] + n [\overset{m-1}{N} - 1]$$

für jedes positive ganze k .

Für $k = m$ und $n > 0$ ist also (§. 4. Anmerk. 2.)

$$\overset{m}{N} = n^m [\overset{0}{N} - 1] + n^{m-1} [\overset{1}{N} - 1] + n^{m-2} [\overset{2}{N} - 1] + \dots + n^2 [\overset{m-2}{N} - 1] + n [\overset{m-1}{N} - 1].$$

§. 6.

Hieraus folgt leicht

1) $\overset{0}{A} = 0$ (§. 4. Anmerk. 2.), $\overset{1}{A} = 1$.

2) $\overset{0}{B} = 0$, $\overset{1}{B} = 2 \cdot \overset{0}{A} = 0$ (1.), $\overset{2}{B} = 2^2 \cdot \overset{0}{A} + 2 \cdot \overset{1}{A} = 2 \cdot 1$ (1.).

3) $\overset{0}{C} = 0$, $\overset{1}{C} = 3 \cdot \overset{0}{B} = 0$ (2.), $\overset{2}{C} = 3^2 \cdot \overset{0}{B} + 3 \cdot \overset{1}{B} = 0$ (2.)

$$\overset{3}{C} = 3^3 \cdot \overset{0}{B} + 3^2 \cdot \overset{1}{B} + 3 \cdot \overset{2}{B} = 3 \cdot 2 \cdot 1$$
 (2.).

4) Man könnte auf diese Art immer weiter gehen, man sieht aber schon, daß für jedes positive ganze n : $\overset{0}{N} = 0$, $\overset{1}{N} = 0$, $\overset{2}{N} = 0$, u. f. w., $\overset{n-2}{N} = 0$, $\overset{n-1}{N} = 0$, $\overset{n}{N} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$.

Dieser Satz wird gewöhnlich durch die Rechnung mit endlichen Differenzen bewiesen. M. f. z. B. *Annales de Mathématiques par Gergonne et Lavernède*, Tom. II. p. 182. — 185., wo zwar eigentlich nur bewiesen wird, daß

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = (n+1)^n - \frac{n}{1} n^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-1)^n - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-2)^n + \dots$$

woraus aber unser Satz leicht folgt, wenn man mit $n+1$ multiplicirt, denn dadurch erhält man

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1) = (n+1)^{n+1} - \frac{n+1}{1} n^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} (n-1)^{n+1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-2)^{n+1} + \dots$$

§. 7.

Nach §. 3. ist

$$\overset{m}{N} = n \overset{m-1}{N} + n [\overset{m-1}{N} - 1]$$

$$= n \overset{m-1}{N} + n \{ (n-1) [\overset{m-2}{N} - 1] + (n-1) [\overset{m-2}{N} - 2] \}$$

$$= n \overset{m-1}{N} + n(n-1) [\overset{m-2}{N} - 1] + n(n-1) [\overset{m-2}{N} - 2]$$

$$= n \overset{m-1}{N} + n(n-1) [\overset{m-2}{N} - 1] + n(n-1) \{ (n-2) [\overset{m-3}{N} - 2] + (n-2) [\overset{m-3}{N} - 3] \}$$

$$= n \overset{m-1}{N} + n(n-1) [\overset{m-2}{N} - 1] + n(n-1)(n-2) [\overset{m-3}{N} - 2] + n(n-1)(n-2) [\overset{m-3}{N} - 3]$$

u. f. f.

u. f. f.

$$\begin{aligned}
 &= nN + n(n-1)[N-1] + n(n-1)(n-2)[N-2] + n(n-1)(n-2)(n-3)[N-3] + \dots \\
 &\quad \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)[N-k+1] + n(n-1)\dots(n-k+1)[N-k] \\
 N - n(n-1)\dots(n-k+1)[N-k] &= nN + n(n-1)[N-1] + n(n-1)(n-2)[N-2] \\
 &\quad + n(n-1)(n-2)(n-3)[N-3] + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)[N-k+1]
 \end{aligned}$$

für jedes positive ganze k .

§. 8.

Ist n eine positive ganze Zahl und $n = k$, so erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
 N &= 1.2.3\dots n[A-1] + 1.2.3\dots nA + 2.3\dots nB + 3.4\dots nC + \dots + nN \\
 \frac{N}{1.2.3\dots n} &= [A-1] + A + \frac{1}{1}B + \frac{1}{1.2}C + \frac{1}{1.2.3}D + \dots + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}N,
 \end{aligned}$$

und wenn man $n + n'$ für m setzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{1.2.3\dots n} &= [A-1] + A + \frac{1}{1}B + \frac{1}{1.2}C + \frac{1}{1.2.3}D + \dots + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}N \\
 &= A + \frac{1}{1}B + \frac{1}{1.2}C + \frac{1}{1.2.3}D + \dots + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}N, \text{ wenn } n' > 0 \text{ (§. 4. Anm.)} \\
 &= 1 + A + \frac{1}{1}B + \frac{1}{1.2}C + \frac{1}{1.2.3}D + \dots + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}N, \text{ wenn } n' = 0 \text{ (§. 4. Anm.)}
 \end{aligned}$$

§. 9.

Wir wissen aus dem Vorhergehenden (§. 6.), daß $N = \overset{\circ}{N} = \overset{1}{N} = \dots = \overset{n-1}{N} = 0$,

$\overset{n}{N} = 1.2.3\dots n$, also $\frac{\overset{n}{N}}{1.2.3\dots n} = 1$. Hieraus und aus §. 8. folgt:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\overset{n+1}{N}}{1.2.3\dots n} &= A + \frac{1}{1}B + \frac{1}{1.2}C + \frac{1}{1.2.3}D + \dots + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}N \\
 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{1.2} = \overset{n+1}{2}\mathfrak{B}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{\overset{n+2}{N}}{1.2.3\dots n} &= A + \frac{1}{1}B + \frac{1}{1.2}C + \frac{1}{1.2.3}D + \dots + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}N \\
 &= 1.2\mathfrak{B} + 2.3\mathfrak{B} + 3.4\mathfrak{B} + 4.5\mathfrak{B} + \dots + n.\overset{n+1}{2}\mathfrak{B} \text{ (I.)} \\
 &= 3.3\mathfrak{C} + 3.4\mathfrak{C} + 3.5\mathfrak{C} + 4.6\mathfrak{C} + \dots + 3.\overset{n+2}{2}\mathfrak{C} \\
 &\quad - 2.2\mathfrak{B} - 2.3\mathfrak{B} - 2.4\mathfrak{B} - 2.5\mathfrak{B} - \dots - 2.\overset{n+1}{2}\mathfrak{B} \text{ a)} \\
 &= 3.\overset{n+3}{2}\mathfrak{D} - 2.\overset{n+2}{2}\mathfrak{C} \text{ b)}
 \end{aligned}$$

a) Es ist nämlich allgemein $n.\overset{n+m-1}{m}\mathfrak{M} = (m+1).\overset{n+m}{m}\mathfrak{M} - m.\overset{n+m-1}{m}\mathfrak{M}$. Denn $\overset{n+m}{m}\mathfrak{M} = \overset{n+m-1}{m}\mathfrak{M} + \frac{n+m}{m+1}$.

$(m+1).\overset{n+m}{m}\mathfrak{M} = (n+m).\overset{n+m-1}{m}\mathfrak{M}$; also $(m+1).\overset{n+m}{m}\mathfrak{M} - m.\overset{n+m-1}{m}\mathfrak{M} = n.\overset{n+m-1}{m}\mathfrak{M}$.

b) Nach der Theorie der figurirten Zahlen.

$$\begin{aligned}
 3) \frac{N^{n+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} &= \frac{3}{1} A + \frac{1}{1} B + \frac{1}{1 \cdot 2} C + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} D + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} N^{n+2} \\
 &= 1 \cdot \{3 \cdot 4D - 2 \cdot 3C\} + 2 \cdot \{3 \cdot 5D - 2 \cdot 4C\} + 3 \cdot \{3 \cdot 6D - 2 \cdot 5C\} + \dots \\
 &\quad \dots + n \{3 \cdot n+3D - 2 \cdot n+2C\} \quad (2.) \\
 &= 3 \cdot \{1 \cdot 4D + 2 \cdot 5D + 3 \cdot 6D + 4 \cdot 7D + \dots + n \cdot n+3D\} \\
 &\quad - 2 \cdot \{1 \cdot 3C + 2 \cdot 4C + 3 \cdot 5C + 4 \cdot 6C + \dots + n \cdot n+2C\} \\
 &= 3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 5C + 5 \cdot 6C + 5 \cdot 7C + 5 \cdot 8C + \dots + 5 \cdot n+4C \\ -4 \cdot 4D - 4 \cdot 5D - 4 \cdot 6D - 4 \cdot 7D - \dots - 4 \cdot n+3D \end{array} \right\} \\
 &\quad - 2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 4D + 4 \cdot 5D + 4 \cdot 6D + 4 \cdot 7D + \dots + 4 \cdot n+3D \\ -3 \cdot 3C - 3 \cdot 4C - 3 \cdot 5C - 3 \cdot 6C - \dots - 3 \cdot n+2C \end{array} \right\} \quad a) \\
 &= 15 \cdot \{5C + 6C + 7C + 8C + \dots + n+4C\} \\
 &\quad - 20 \cdot \{4D + 5D + 6D + 7D + \dots + n+3D\} \\
 &\quad + 6 \cdot \{3C + 4C + 5C + 6C + \dots + n+2C\} \\
 &= 15 \cdot n+5C - 20 \cdot n+4C + 6 \cdot n+3D. \quad b)
 \end{aligned}$$

4) Auf diese Art könnte man immer weiter gehen, und Ausdrücke durch die Binomial-Coefficienten auch für die folgenden Reihen erhalten; der folgende Paragraph wird das allgemeine Gesetz dieser Ausdrücke kennen lehren.

§. 10.

Es ist

$$\frac{N^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = {}_1C_1 \cdot n+1D$$

$$\frac{N^{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = {}_1C_2 \cdot n+3D - {}_2C_1 \cdot n+2C$$

$$\frac{N^{n+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = {}_1C_3 \cdot n+5C - {}_2C_2 \cdot n+4C + {}_3C_1 \cdot n+3D$$

$$\frac{N^{n+4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = {}_1C_4 \cdot n+7D - {}_2C_3 \cdot n+6C + {}_3C_2 \cdot n+5C - {}_4C_1 \cdot n+4C$$

u. f. f.

u. f. f.

$$\frac{N^{n+m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = {}_1C_m \cdot n+2m-1D - {}_2C_{m-1} \cdot n+2m-2C + {}_3C_{m-2} \cdot n+2m-3C - \dots$$

$$\dots \pm {}_{m-1}C_2 \cdot n+m+1C \mp {}_mC_1 \cdot n+mD.$$

Die Charaktere C bedeuten die bestimmten Coefficienten, in welche die Binomial-Coefficienten multiplicirt sind.

Man nehme an, daß dieses Gesetz für N gelte, so läßt sich auf folgende Art zeigen, daß es auch für N gelten muß. Es ist nach dieser Annahme

$$\begin{aligned}
 \frac{N^{n+m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} &= A + \frac{1}{1} B + \frac{1}{1 \cdot 2} C + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} D + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} N^{n+m} \quad (\S. 8.) = \\
 &= {}_1C_m \cdot 2^m \mathfrak{N}^m - {}_2C_{m-1} \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} + {}_3C_{m-2} \cdot 2^{m-2} \mathfrak{N}^{m-2} - \dots \pm {}_{m-1}C_2 \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 \mp {}_mC_1 \cdot 2^1 \mathfrak{N}^1 \\
 &\quad + 2 \{ {}_1C_m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} - {}_2C_{m-1} \cdot 2^m \mathfrak{N}^m + {}_3C_{m-2} \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} - \dots \pm {}_{m-1}C_2 \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 \mp {}_mC_1 \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 \} \\
 &\quad + 3 \{ {}_1C_m \cdot 2^{m+2} \mathfrak{N}^{m+2} - {}_2C_{m-1} \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} + {}_3C_{m-2} \cdot 2^m \mathfrak{N}^m - \dots \pm {}_{m-1}C_2 \cdot 2^4 \mathfrak{N}^4 \mp {}_mC_1 \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 \} \\
 &\quad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \qquad \text{u. f. f.} \\
 &\quad + n \{ {}_1C_m \cdot 2^{n+2m-1} \mathfrak{N}^{n+2m-1} - {}_2C_{m-1} \cdot 2^{n+2m-2} \mathfrak{N}^{n+2m-2} + {}_3C_{m-2} \cdot 2^{n+2m-3} \mathfrak{N}^{n+2m-3} - \dots \pm {}_{m-1}C_2 \cdot 2^{n+m+1} \mathfrak{N}^{n+m+1} \mp {}_mC_1 \cdot 2^{n+m} \mathfrak{N}^{n+m} \} \\
 &= {}_1C_m \cdot \{ 1 \cdot 2^m \mathfrak{N}^m + 2 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} + 3 \cdot 2^{m+2} \mathfrak{N}^{m+2} + \dots + n \cdot 2^{n+2m-1} \mathfrak{N}^{n+2m-1} \} \\
 &\quad - {}_2C_{m-1} \cdot \{ 1 \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} + 2 \cdot 2^m \mathfrak{N}^m + 3 \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} + \dots + n \cdot 2^{n+2m-2} \mathfrak{N}^{n+2m-2} \} \\
 &\quad + {}_3C_{m-2} \cdot \{ 1 \cdot 2^{m-2} \mathfrak{N}^{m-2} + 2 \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} + 3 \cdot 2^m \mathfrak{N}^m + \dots + n \cdot 2^{n+2m-3} \mathfrak{N}^{n+2m-3} \} \\
 &\quad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \qquad \text{u. f. f.} \\
 &\quad \pm {}_{m-1}C_2 \cdot \{ 1 \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 + 2 \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 + 3 \cdot 2^4 \mathfrak{N}^4 + \dots + n \cdot 2^{n+m+1} \mathfrak{N}^{n+m+1} \} \\
 &\quad \mp {}_mC_1 \cdot \{ 1 \cdot 2^1 \mathfrak{N}^1 + 2 \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 + 3 \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 + \dots + n \cdot 2^{n+m} \mathfrak{N}^{n+m} \} \\
 &= {}_1C_m \cdot \left\{ (2m+1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} + (2m+1) \cdot 2^{m+2} \mathfrak{N}^{m+2} + (2m+1) \cdot 2^{m+3} \mathfrak{N}^{m+3} + \dots + (2m+1) \cdot 2^{n+2m} \mathfrak{N}^{n+2m} \right\} \\
 &\quad - 2m \cdot 2^m \mathfrak{N}^m - 2m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} - 2m \cdot 2^{m+2} \mathfrak{N}^{m+2} - \dots - 2m \cdot 2^{n+2m-1} \mathfrak{N}^{n+2m-1} \\
 &\quad - {}_2C_{m-1} \cdot \left\{ 2m \cdot 2^m \mathfrak{N}^m + 2m \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} + 2m \cdot 2^{m+2} \mathfrak{N}^{m+2} + \dots + 2m \cdot 2^{n+2m-1} \mathfrak{N}^{n+2m-1} \right\} \\
 &\quad - (2m-1) \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} - (2m-1) \cdot 2^m \mathfrak{N}^m - (2m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} - \dots - (2m-1) \cdot 2^{n+2m-2} \mathfrak{N}^{n+2m-2} \\
 &\quad + {}_3C_{m-2} \cdot \left\{ (2m-1) \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} + (2m-1) \cdot 2^m \mathfrak{N}^m + (2m-1) \cdot 2^{m+1} \mathfrak{N}^{m+1} + \dots + (2m-1) \cdot 2^{n+2m-2} \mathfrak{N}^{n+2m-2} \right\} \\
 &\quad - (2m-2) \cdot 2^{m-2} \mathfrak{N}^{m-2} - (2m-2) \cdot 2^{m-1} \mathfrak{N}^{m-1} - (2m-2) \cdot 2^m \mathfrak{N}^m - \dots - (2m-2) \cdot 2^{n+2m-3} \mathfrak{N}^{n+2m-3} \\
 &\quad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \qquad \text{u. f. f.} \\
 &\quad \pm {}_{m-1}C_2 \cdot \left\{ (m+3) \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 + (m+3) \cdot 2^4 \mathfrak{N}^4 + (m+3) \cdot 2^5 \mathfrak{N}^5 + \dots + (m+3) \cdot 2^{n+m+2} \mathfrak{N}^{n+m+2} \right\} \\
 &\quad - (m+2) \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 - (m+2) \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 - (m+2) \cdot 2^4 \mathfrak{N}^4 - \dots - (m+2) \cdot 2^{n+m+1} \mathfrak{N}^{n+m+1} \\
 &\quad \mp {}_mC_1 \cdot \left\{ (m+2) \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 + (m+2) \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 + (m+2) \cdot 2^4 \mathfrak{N}^4 + \dots + (m+2) \cdot 2^{n+m+1} \mathfrak{N}^{n+m+1} \right\} \\
 &\quad - (m+1) \cdot 2^1 \mathfrak{N}^1 - (m+1) \cdot 2^2 \mathfrak{N}^2 - (m+1) \cdot 2^3 \mathfrak{N}^3 - \dots - (m+1) \cdot 2^{n+m} \mathfrak{N}^{n+m} \quad \} \text{ a) }
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2m+1) \cdot {}_1C_m \cdot \{ {}^{m+1}_{2m+1}M + {}^{m+1}_{2m+2}M + {}^{m+1}_{2m+3}M + \dots + {}^{m+1}_{n+2m}M \} \\
 &\quad - 2m \{ {}_1C_m + {}_2C_{m-1} \} \{ {}^m_{2m}M + {}^m_{2m+1}M + {}^m_{2m+2}M + \dots + {}^m_{n+2m-1}M \} \\
 &\quad + (2m-1) \{ {}_2C_{m-1} + {}_3C_{m-2} \} \{ {}^{m-1}_{2m-1}M + {}^{m-1}_{2m}M + {}^{m-1}_{2m+1}M + \dots + {}^{m-1}_{n+2m-2}M \} \\
 &\quad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \qquad \text{u. f. f.} \\
 &\quad \mp (m+2) \{ {}_{m-1}C_2 + {}_mC_1 \} \{ {}^{+2}_{m+2}M + {}^{+2}_{m+3}M + {}^{+2}_{m+4}M + \dots + {}^{+2}_{n+m+1}M \} \\
 &\quad \pm (m+1) \cdot {}_mC_1 \cdot \{ {}^{+1}_{m+1}M + {}^{+1}_{m+2}M + {}^{+1}_{m+3}M + \dots + {}^{+1}_{n+m}M \} \\
 &= {}_1C_{m+1} \cdot {}^{m+2}_{n+2m+1}M - {}_2C_m \cdot {}^{m+1}_{n+2m}M + {}_3C_{m-1} \cdot {}^m_{n+2m-1}M - \dots \mp {}_mC_2 \cdot {}^{+3}_{n+m+2}M \pm {}_{m+1}C_1 \cdot {}^{+2}_{n+m+1}M. \text{ b) }
 \end{aligned}$$

Das bemerkte Gesetz gilt also auch für N , und die unveränderlichen Coefficienten in dem Ausdrucke für N werden aus den unveränderlichen Coefficienten in der Formel für N durch folgende Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned}
 {}_1C_{m+1} &= (2m+1) \cdot {}_1C_m, \quad {}_2C_m = 2m \{ {}_1C_m + {}_2C_{m-1} \} \\
 {}_3C_{m-1} &= (2m-1) \{ {}_2C_{m-1} + {}_3C_{m-2} \}, \quad {}_4C_{m-2} = (2m-2) \{ {}_3C_{m-2} + {}_4C_{m-3} \} \\
 &\qquad \qquad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \text{u. f. f.} \\
 {}_mC_2 &= (m+2) \{ {}_{m-1}C_2 + {}_mC_1 \}, \quad {}_{m+1}C_1 = (m+1) \cdot {}_mC_1.
 \end{aligned}$$

§. II.

Auf diese Art habe ich erhalten:

$$\begin{aligned}
 {}^nN &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \\
 {}^{n+1}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot {}^{n+1}B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \\
 {}^{n+2}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 3 \cdot {}^{n+3}D - 2 \cdot {}^{n+2}E \} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3n+1}{4} \\
 {}^{n+3}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 15 \cdot {}^{n+5}F - 20 \cdot {}^{n+4}G + 6 \cdot {}^{n+3}D \} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 {}^{n+4}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 105 \cdot {}^{n+7}H - 210 \cdot {}^{n+6}I + 130 \cdot {}^{n+5}F - 24 \cdot {}^{n+4}G \} \\
 {}^{n+5}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 945 \cdot {}^{n+9}K - 2520 \cdot {}^{n+8}J + 2380 \cdot {}^{n+7}H - 924 \cdot {}^{n+6}I + 120 \cdot {}^{n+5}F \} \\
 {}^{n+6}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 10395 \cdot {}^{n+11}M - 34650 \cdot {}^{n+10}L + 44100 \cdot {}^{n+9}K - 26432 \cdot {}^{n+8}J + 7308 \cdot {}^{n+7}H - 720 \cdot {}^{n+6}I \} \\
 {}^{n+7}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 135135 \cdot {}^{n+13}O - 540545 \cdot {}^{n+12}M + 866250 \cdot {}^{n+11}M - 705320 \cdot {}^{n+10}L + 303660 \cdot {}^{n+9}K \\
 &\quad - 64224 \cdot {}^{n+8}J + 5040 \cdot {}^{n+7}H \} \\
 {}^{n+8}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 2027025 \cdot {}^{n+15}Q - 9459520 \cdot {}^{n+14}P + 18288335 \cdot {}^{n+13}O - 18858840 \cdot {}^{n+12}M \\
 &\quad + 11098780 \cdot {}^{n+11}M - 3678840 \cdot {}^{n+10}L + 623376 \cdot {}^{n+9}K - 40320 \cdot {}^{n+8}J \} \\
 {}^{n+9}N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \{ 34459425 \cdot {}^{n+17}S - 183784720 \cdot {}^{n+16}N + 416217825 \cdot {}^{n+15}Q - 520060450 \cdot {}^{n+14}P \\
 &\quad + 389449060 \cdot {}^{n+13}O - 177331440 \cdot {}^{n+12}M + 47324376 \cdot {}^{n+11}M - 6636960 \cdot {}^{n+10}L \\
 &\quad + 362880 \cdot {}^{n+9}K \}
 \end{aligned}$$

§. 12.

1) Es erhellet aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß N^m immer durch das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ theilbar ist, vorausgesetzt, daß n und m ganze positive Zahlen sind, denn die Binomial-Coefficienten ganzer Exponenten sind ganze Zahlen.

2) Ganz auf dieselbe Art, wie *Lagrange* den *Wilson'schen* Satz von den Primzahlen bewiesen hat, c) läßt sich zeigen, daß $N^m \pm 1$ durch $m + 1$ theilbar ist, wenn $m + 1$ eine Primzahl ist, welche $> n$. Das obere Zeichen gilt, wenn n eine gerade, das untere, wenn n eine ungerade Zahl ist.

a) Ist nun n eine Primzahl, so ist $n - 1$ eine gerade Zahl, also $[N^{n-1}] + 1$, d. i. $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1) + 1$ durch n theilbar. d)

b) $n - 2$ ist eine ungerade Zahl, und folglich $[N^{n-2}] - 1$, d. i. $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 2) \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2} - 1$ durch n theilbar.

c) $n - 3$ ist eine gerade Zahl, also $[N^{n-3}] + 1$, d. i. $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 3) \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3n-8}{4} + 1$ durch n theilbar.

d) $n - 4$ ist eine ungerade Zahl, also $[N^{n-4}] - 1$, d. i. $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 4) \cdot \frac{(n-4)(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 1$ durch n theilbar. (M. f. §. 11.)

§. 13.

Für jedes n ist

$$[N^{m+1}] = (n+1) \{ 1 \cdot \overset{\circ}{N} + {}^m\mathfrak{A} \cdot \overset{1}{N} + {}^m\mathfrak{B} \cdot \overset{2}{N} + \dots + {}^{m-1}\mathfrak{M} \cdot \overset{m-1}{N} + {}^m\mathfrak{M} \cdot \overset{m}{N} \}$$

Beweis.

$$1 \cdot \overset{\circ}{N} = 1 - {}^n\mathfrak{A} \cdot 1 + {}^n\mathfrak{B} \cdot 1 - {}^n\mathfrak{C} \cdot 1 + \dots$$

$${}^m\mathfrak{A} \cdot \overset{1}{N} = {}^m\mathfrak{A} \cdot n - {}^n\mathfrak{A} \cdot {}^m\mathfrak{A} (n-1) + {}^n\mathfrak{B} \cdot {}^m\mathfrak{A} (n-2) - {}^n\mathfrak{C} \cdot {}^m\mathfrak{A} (n-3) + \dots$$

c) *Lagrange* hat den *Wilson'schen* Satz auf doppelte Art bewiesen, in der Abhandlung: *Démonstration d'un nouveau Théorème d'Arithmétique*. (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin. 1771. p. 125—137.) Ich meine hier den zweyten Beweis, den man auch in *Legendre Essais sur la Théorie des nombres*, 2ème édit. Paris 1808. 4. Sect. II., findet.

d) Dies ist der *Wilson'sche* Satz von den Primzahlen, welcher zuerst in einem Werke von *Waring: Meditationes algebraicae*. Cantabr. 1770. 4. p. 218., vorkommt, aber ohne Beweis. Außer *Lagrange* haben auch *Euler* und *Laplace* (f. *Euleri Opuscula analytica* und *Lacroix Traité du Calcul differ. et intégr.* Tom. III. Nouv. édit. p. 722.) Beweise desselben gegeben.

$${}^m\mathfrak{B} \cdot N^2 = {}^m\mathfrak{B} \cdot n^2 - {}^n\mathfrak{A} \cdot {}^m\mathfrak{B} (n-1)^2 + {}^n\mathfrak{B} \cdot {}^m\mathfrak{B} (n-2)^2 - {}^n\mathfrak{C} \cdot {}^m\mathfrak{B} (n-3)^2 + \dots$$

$${}^m\mathfrak{C} \cdot N^3 = {}^m\mathfrak{C} \cdot n^3 - {}^n\mathfrak{A} \cdot {}^m\mathfrak{C} (n-1)^3 + {}^n\mathfrak{B} \cdot {}^m\mathfrak{C} (n-2)^3 - {}^n\mathfrak{C} \cdot {}^m\mathfrak{C} (n-3)^3 + \dots$$

u. f. f. u. f. f.

$${}^{m-1}\mathfrak{M} \cdot N^{m-1} = {}^{m-1}\mathfrak{M} \cdot n^{m-1} - {}^n\mathfrak{A} \cdot {}^{m-1}\mathfrak{M} (n-1)^{m-1} + {}^n\mathfrak{B} \cdot {}^{m-1}\mathfrak{M} (n-2)^{m-1} - {}^n\mathfrak{C} \cdot {}^{m-1}\mathfrak{M} (n-3)^{m-1} + \dots$$

$${}^m\mathfrak{M} \cdot N^m = {}^m\mathfrak{M} \cdot n^m - {}^n\mathfrak{A} \cdot {}^m\mathfrak{M} (n-1)^m + {}^n\mathfrak{B} \cdot {}^m\mathfrak{M} (n-2)^m - {}^n\mathfrak{C} \cdot {}^m\mathfrak{M} (n-3)^m + \dots$$

Bezeichnet man nun die Summe der Gröſſen vor den Gleichheitszeichen durch P , ſo iſt

$$\begin{aligned} P &= 1 + {}^m\mathfrak{A} \cdot n + {}^m\mathfrak{B} \cdot n^2 + {}^m\mathfrak{C} \cdot n^3 + \dots + {}^{m-1}\mathfrak{M} \cdot n^{m-1} - {}^m\mathfrak{M} \cdot n^m \\ &\quad - {}^n\mathfrak{A} \{ 1 + {}^m\mathfrak{A} (n-1) + {}^m\mathfrak{B} (n-1)^2 + {}^m\mathfrak{C} (n-1)^3 + \dots + {}^{m-1}\mathfrak{M} (n-1)^{m-1} + {}^m\mathfrak{M} (n-1)^m \} \\ &\quad + {}^n\mathfrak{B} \{ 1 + {}^m\mathfrak{A} (n-2) + {}^m\mathfrak{B} (n-2)^2 + {}^m\mathfrak{C} (n-2)^3 + \dots + {}^{m-1}\mathfrak{M} (n-2)^{m-1} + {}^m\mathfrak{M} (n-2)^m \} \\ &\quad - {}^n\mathfrak{C} \{ 1 + {}^m\mathfrak{A} (n-3) + {}^m\mathfrak{B} (n-3)^2 + {}^m\mathfrak{C} (n-3)^3 + \dots + {}^{m-1}\mathfrak{M} (n-3)^{m-1} + {}^m\mathfrak{M} (n-3)^m \} \\ &\quad + \text{u. f. f.} \\ &= (n+1)^m - {}^n\mathfrak{A} \cdot n^m + {}^n\mathfrak{B} (n-1)^m - {}^n\mathfrak{C} (n-2)^m + \dots \\ &= (n+1)^m - {}^n\mathfrak{A} \cdot \frac{n}{1} \cdot n^m + {}^n\mathfrak{A} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (n-1)^m - {}^n\mathfrak{B} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot (n-2)^m + \dots \\ &= (n+1)^m - {}^n\mathfrak{A} \cdot \frac{1}{1} \cdot n^{m+1} + {}^n\mathfrak{A} \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1)^{m+1} - {}^n\mathfrak{B} \cdot \frac{1}{3} \cdot (n-2)^{m+1} + \dots \\ (n+1)P &= (n+1)^{m+1} - {}^n\mathfrak{A} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot n^{m+1} + {}^n\mathfrak{A} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot (n-1)^{m+1} - {}^n\mathfrak{B} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot (n-2)^{m+1} + \dots \\ &= (n+1)^{m+1} - {}^{n+1}\mathfrak{A} \cdot n^{m+1} + {}^{n+1}\mathfrak{B} (n-1)^{m+1} - {}^{n+1}\mathfrak{C} (n-2)^{m+1} + \dots \\ &= [N+1]^{m+1}, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

§. 14.

Aus dieſem Satze läßt ſich ein neuer Beweis des Satzes in §. 6. ableiten. Es iſt nämlich aus der Tabelle in §. 4.:

$$\overset{\circ}{A} = 0, \overset{1}{A} = 1$$

$$\overset{\circ}{B} = 0, \overset{1}{B} = 0, \overset{2}{B} = 1.2$$

$$\overset{\circ}{C} = 0, \overset{1}{C} = 0, \overset{2}{C} = 0, \overset{3}{C} = 1.2.3$$

Gelte nun der Satz für n , und ſey alſo

$$\overset{\circ}{N} = \overset{1}{N} = \overset{2}{N} = \overset{3}{N} = \dots = \overset{n-1}{N} = 0, \overset{n}{N} = 1.2.3 \dots n,$$

ſo gilt er auch für $n+1$. Denn aus §. 13. iſt

$$[N+1]^{n+1-m} = (n+1) \{ 1 \cdot \overset{\circ}{N} + {}^{n-m+1}\mathfrak{A} \cdot \overset{1}{N} + {}^{n-m+1}\mathfrak{B} \cdot \overset{2}{N} + \dots + {}^{n-m+1}\mathfrak{M} \cdot \overset{n-m+1}{N} \}, \text{ alſo}$$

$$[N+1]^{n+1-m} = 0 \text{ für } m > 0, \text{ und } = (n+1) \overset{n}{N} = 1.2.3 \dots n (n+1) \text{ für } m = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 15.

Für jedes n ist

$$[N+1] = \frac{n+1}{n} \{ N + {}^n\mathcal{A} \cdot N + {}^n\mathcal{B} \cdot N + {}^n\mathcal{C} \cdot N + \dots + {}^{m-1}\mathcal{M} \cdot N \}$$

Beweis.

$$N = n - {}^n\mathcal{A} (n-1) + {}^n\mathcal{B} (n-2) - {}^n\mathcal{C} (n-3) + \dots$$

$${}^n\mathcal{A} \cdot N = {}^n\mathcal{A} \cdot n^2 - {}^n\mathcal{A} \cdot {}^n\mathcal{A} (n-1)^2 + {}^n\mathcal{B} \cdot {}^n\mathcal{A} (n-2)^2 - {}^n\mathcal{C} \cdot {}^n\mathcal{A} (n-3)^2 + \dots$$

$${}^n\mathcal{B} \cdot N = {}^n\mathcal{B} \cdot n^3 - {}^n\mathcal{A} \cdot {}^n\mathcal{B} (n-1)^3 + {}^n\mathcal{B} \cdot {}^n\mathcal{B} (n-2)^3 - {}^n\mathcal{C} \cdot {}^n\mathcal{B} (n-3)^3 + \dots$$

$${}^n\mathcal{C} \cdot N = {}^n\mathcal{C} \cdot n^4 - {}^n\mathcal{A} \cdot {}^n\mathcal{C} (n-1)^4 + {}^n\mathcal{B} \cdot {}^n\mathcal{C} (n-2)^4 - {}^n\mathcal{C} \cdot {}^n\mathcal{C} (n-3)^4 + \dots$$

u. f. f.

u. f. f.

$${}^{m-1}\mathcal{M} \cdot N = {}^{m-1}\mathcal{M} \cdot n^m - {}^n\mathcal{A} \cdot {}^{m-1}\mathcal{M} (n-1)^m + {}^n\mathcal{B} \cdot {}^{m-1}\mathcal{M} (n-2)^m - {}^n\mathcal{C} \cdot {}^{m-1}\mathcal{M} (n-3)^m + \dots$$

Bezeichnet man die Summe der Größen vor den Gleichheitszeichen durch Q , so ist

$$Q = n \{ 1 + {}^n\mathcal{A} \cdot n + {}^n\mathcal{B} \cdot n^2 + {}^n\mathcal{C} \cdot n^3 + \dots + {}^{m-1}\mathcal{M} \cdot n^{m-1} \}$$

$$- (n-1) {}^n\mathcal{A} \{ 1 + {}^n\mathcal{A} (n-1) + {}^n\mathcal{B} (n-1)^2 + {}^n\mathcal{C} (n-1)^3 + \dots + {}^{m-1}\mathcal{M} (n-1)^{m-1} \}$$

$$+ (n-2) {}^n\mathcal{B} \{ 1 + {}^n\mathcal{A} (n-2) + {}^n\mathcal{B} (n-2)^2 + {}^n\mathcal{C} (n-2)^3 + \dots + {}^{m-1}\mathcal{M} (n-2)^{m-1} \}$$

$$- (n-3) {}^n\mathcal{C} \{ 1 + {}^n\mathcal{A} (n-3) + {}^n\mathcal{B} (n-3)^2 + {}^n\mathcal{C} (n-3)^3 + \dots + {}^{m-1}\mathcal{M} (n-3)^{m-1} \}$$

+ u. f. f.

$$= n \{ (n+1)^m - n^m \} - (n-1) {}^n\mathcal{A} \{ n^m - (n-1)^m \} + (n-2) {}^n\mathcal{B} \{ (n-1)^m - (n-2)^m \}$$

$$- (n-3) {}^n\mathcal{C} \{ (n-2)^m - (n-3)^m \} + \dots$$

$$\frac{n+1}{n} Q = (n+1)^{m+1} - \frac{n+1}{n} n^{m+1} + \frac{n+1}{n} {}^n\mathcal{A} (n-1)^{m+1} - \frac{n+1}{n} {}^n\mathcal{B} (n-2)^{m+1} + \dots$$

$$- \frac{n+1}{n} (n-1) {}^n\mathcal{A} n^m + \frac{n+1}{n} (n-2) {}^n\mathcal{B} (n-1)^m - \frac{n+1}{n} (n-3) {}^n\mathcal{C} (n-2)^m + \dots$$

$$= (n+1)^{m+1} - {}^{n+1}\mathcal{A} n^{m+1} + {}^{n+1}\mathcal{B} (n-1)^{m+1} - {}^{n+1}\mathcal{C} (n-2)^{m+1} + \dots e)$$

$$= [N+1] \text{ w. z. b. w.}$$

e) Es ist nämlich allgemein $\frac{n+1}{n} \cdot {}^n\mathcal{R} (n-k)^{m+1} + \frac{n+1}{n} (n-k-1) \cdot {}^{n+1}\mathcal{R} (n-k)^m = \frac{n+1}{n} \cdot {}^n\mathcal{R} (n-k)^{m+1}$

$$+ \frac{n+1}{n} (n-k-1) \cdot {}^n\mathcal{R} \cdot \frac{n-k}{k+1} (n-k)^m = \frac{n+1}{n} \left\{ {}^n\mathcal{R} + {}^n\mathcal{R} \cdot \frac{n-k-1}{k+1} \right\} (n-k)^{m+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot {}^n\mathcal{R} \cdot \frac{n}{k+1} \cdot (n-k)^{m+1} = {}^{n+1}\mathcal{R} \cdot \frac{n+1}{k+1} (n-k)^{m+1} = {}^{n+1}\mathcal{R} (n-k)^{m+1}.$$

§. 16.

Aus §. 13. und §. 15. folgt leicht:

$$\begin{aligned}
 n \{ \overset{0}{N} + {}^m\mathfrak{A}.\overset{1}{N} + {}^m\mathfrak{B}.\overset{2}{N} + {}^m\mathfrak{C}.\overset{3}{N} + {}^m\mathfrak{D}.\overset{4}{N} + \dots + {}^m\mathfrak{M}.\overset{m}{N} \} &= \\
 &= N + {}^m\mathfrak{A}.\overset{2}{N} + {}^m\mathfrak{B}.\overset{3}{N} + {}^m\mathfrak{C}.\overset{4}{N} + \dots + {}^m\mathfrak{M}.\overset{m-1}{N}, \text{ also} \\
 0 &= \overset{0}{N}.n &= \overset{0}{N}.n \\
 &+ \overset{1}{N} \{ n {}^m\mathfrak{A} - 1 \} &+ \overset{1}{N}.1. \frac{nm-1}{1} \\
 &+ \overset{2}{N} \{ n {}^m\mathfrak{B} - {}^m\mathfrak{A} \} &+ \overset{2}{N}.{}^m\mathfrak{A}. \frac{n(m-1)-2}{2} \\
 &+ \overset{3}{N} \{ n {}^m\mathfrak{C} - {}^m\mathfrak{B} \} &+ \overset{3}{N}.{}^m\mathfrak{B}. \frac{n(m-2)-3}{3} \\
 &+ \overset{4}{N} \{ n {}^m\mathfrak{D} - {}^m\mathfrak{C} \} &+ \overset{4}{N}.{}^m\mathfrak{C}. \frac{n(m-3)-4}{4} \\
 &\dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\
 &+ \overset{m}{N} \{ n {}^m\mathfrak{M} - {}^m\mathfrak{M}^{-1} \} &+ \overset{m}{N}.{}^m\mathfrak{M}^{-1}. \frac{n.1-m}{m} \quad f)
 \end{aligned}$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $\overset{0}{N} = \overset{1}{N} = \overset{2}{N} = \dots = \overset{m-1}{N} = 0$, also

$$\begin{aligned}
 0 &= \overset{n}{N}.{}^m\mathfrak{M}^{-1}. \frac{n(m-n+1)-n}{n} &= \overset{n}{N}.{}^m\mathfrak{A}. \frac{m-1.n}{m} \\
 &+ \overset{n+1}{N}.{}^m\mathfrak{M}. \frac{n(m-n)-(n+1)}{n+1} &+ \overset{m-1}{N}.{}^m\mathfrak{B}. \frac{m-1-2n}{m-1} \\
 &+ \overset{n+2}{N}.{}^{m+1}\mathfrak{M}. \frac{n(m-n-1)-(n+2)}{n+2} &+ \overset{m-2}{N}.{}^m\mathfrak{C}. \frac{m-2-3n}{m-2} \\
 &+ \overset{n+3}{N}.{}^{m+2}\mathfrak{M}. \frac{n(m-n-2)-(n+3)}{n+3} &+ \overset{m-3}{N}.{}^m\mathfrak{D}. \frac{m-3-4n}{m-4} \\
 &\dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\
 &+ \overset{n}{N}.{}^m\mathfrak{M}^{-1}. \frac{n.1-m}{m} &+ \overset{n}{N}.{}^{m-n+1}\mathfrak{M}. \frac{n-(m-n+1)n}{n} \\
 &= \overset{n}{N}.1. \frac{m}{1}. \frac{m-1.n}{m} &= \overset{n}{N}.1. \frac{m-1.n}{1} \\
 &+ \overset{m-1}{N}.{}^m\mathfrak{A}. \frac{m-1}{2}. \frac{m-1-2n}{m-1} &+ \overset{m-1}{N}.{}^m\mathfrak{A}. \frac{m-1-2n}{2} \\
 &+ \overset{m-2}{N}.{}^m\mathfrak{B}. \frac{m-2}{3}. \frac{m-2-3n}{m-2} &+ \overset{m-2}{N}.{}^m\mathfrak{B}. \frac{m-2-3n}{3}
 \end{aligned}$$

$$f) \quad n.{}^{m+1}\mathfrak{K} - {}^m\mathfrak{K} = n.{}^m\mathfrak{K}. \frac{m-k}{k+1} - {}^m\mathfrak{K} = {}^m\mathfrak{K} \left\{ \frac{n(m-k)}{k+1} - 1 \right\} = {}^m\mathfrak{K} \left\{ \frac{n(m-k)-(k+1)}{k+1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{N}^{\bar{m}-3} \cdot {}^m\mathfrak{C} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-3-4n}{m-3} & + \bar{N}^{\bar{m}-3} \cdot {}^m\mathfrak{C} \cdot \frac{m-3-4n}{4} \\
& \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\
& + \bar{N}^{\bar{n}} \cdot {}^m\mathfrak{M} \cdot \frac{n}{m-n+1} \cdot \frac{n-(m-n+1)n}{n} & + \bar{N}^{\bar{n}} \cdot {}^m\mathfrak{M} \cdot \frac{n-(m-n+1)n}{m-n+1}
\end{aligned}$$

§. 17.

1) In §. 16. sey $n = 1$, also $\bar{N} = 1$, so ist

$$0 = 1 \cdot \frac{m-1}{1} + {}^m\mathfrak{A} \cdot \frac{m-3}{2} + {}^m\mathfrak{B} \cdot \frac{m-5}{3} + {}^m\mathfrak{C} \cdot \frac{m-7}{4} + \dots + {}^m\mathfrak{M} \cdot \frac{m-(2m-1)}{m}$$

2) Sey $n = 2$, also $\bar{N} = 2^m - 2 = 2(2^{m-1} - 1)$, folglich

$$\begin{aligned}
0 = 1 \cdot \frac{(2^{m-1}-1)(m-2)}{1} & + {}^m\mathfrak{A} \cdot \frac{(2^{m-2}-1)(m-5)}{2} + {}^m\mathfrak{B} \cdot \frac{(2^{m-3}-1)(m-8)}{3} + {}^m\mathfrak{C} \cdot \frac{(2^{m-3}-1)(m-8)}{3} \\
& + \dots + {}^m\mathfrak{M} \cdot \frac{(2-1)(m-(3m-4))}{m-1}
\end{aligned}$$

§. 18.

Es ist

$$\bar{N} + {}^m\mathfrak{A} \bar{N}^2 + {}^m\mathfrak{B} \bar{N}^3 + {}^m\mathfrak{C} \bar{N}^4 + \dots + {}^m\mathfrak{M} \bar{N}^{\bar{m}-1} + {}^m\mathfrak{M} \bar{N}^{\bar{m}} = \frac{n}{n+1} [\bar{N}^{\bar{m}+1}] \quad (\S. 15.)$$

$$n\bar{N} + n {}^m\mathfrak{A} \bar{N}^2 + n {}^m\mathfrak{B} \bar{N}^3 + n {}^m\mathfrak{C} \bar{N}^4 + \dots + n {}^m\mathfrak{M} \bar{N}^{\bar{m}-1} + n {}^m\mathfrak{M} \bar{N}^{\bar{m}} = \frac{n}{n+1} [\bar{N}^{\bar{m}+1}] \quad (\S. 13.)$$

$$\text{Also } 0 = \bar{N} - n\bar{N} = n[\bar{N}^0 - 1]$$

$$+ {}^m\mathfrak{A} \{ \bar{N}^2 - n\bar{N} \} \quad + n {}^m\mathfrak{A} [\bar{N}^1 - 1]$$

$$+ {}^m\mathfrak{B} \{ \bar{N}^3 - n\bar{N}^2 \} \quad + n {}^m\mathfrak{B} [\bar{N}^2 - 1]$$

$$+ {}^m\mathfrak{C} \{ \bar{N}^4 - n\bar{N}^3 \} \quad + n {}^m\mathfrak{C} [\bar{N}^3 - 1]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$+ {}^m\mathfrak{M} \{ \bar{N}^{\bar{m}-1} - n\bar{N}^{\bar{m}-2} \} \quad + n {}^m\mathfrak{M} [\bar{N}^{\bar{m}-1} - 1]$$

$$+ {}^m\mathfrak{M} \{ \bar{N}^{\bar{m}} - n\bar{N}^{\bar{m}-1} \} \quad + n {}^m\mathfrak{M} [\bar{N}^{\bar{m}} - 1]$$

$$- n {}^m\mathfrak{M} \bar{N}^{\bar{m}} \quad - n {}^m\mathfrak{M} \bar{N}^{\bar{m}} \quad (\S. 3.)$$

$$\bar{N} = [\bar{N}^0 - 1] + {}^m\mathfrak{A} [\bar{N}^1 - 1] + {}^m\mathfrak{B} [\bar{N}^2 - 1] + \dots + {}^m\mathfrak{M} [\bar{N}^{\bar{m}-1} - 1] + {}^m\mathfrak{M} [\bar{N}^{\bar{m}} - 1].$$

§. 19.

Sey hier n eine positive ganze Zahl, so ist

$$1) \quad N = m \overline{N-1} A + m \overline{N-1} A + m \overline{N-1} A + \dots + m \overline{N-1} A + m \overline{N-1} A.$$

Hieraus folgt ferner

$$\begin{aligned} 2) \quad N &= m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \\ &+ m \overline{N-2} A \cdot \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ m \overline{N-2} A \cdot \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ m \overline{N-2} A \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A \} \\ &+ m \overline{N-2} A \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &= [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &= m \overline{N-2} [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ m \overline{N-2} [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ m \overline{N-2} [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ m \overline{N-2} [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \\ &+ m \overline{N-2} [N-2] \{ m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A + \dots + m \overline{N-2} A + m \overline{N-2} A \} \end{aligned}$$

Es ist also nach Num. 1.:

$$N = m \overline{N-2} B + m \overline{N-2} B + m \overline{N-2} B + \dots + m \overline{N-2} B + m \overline{N-2} B.$$

3) Man könnte auf diese Art immer weiter gehen, das allgemeine Gesetz liegt aber schon vor Augen. Es wird nämlich seyn:

$$\begin{aligned} g) \quad \text{Es ist nämlich überhaupt } m \overline{N} \cdot m \overline{N} &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{n(n-1)\dots(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)} \\ &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)} \cdot \frac{(m-n+k)(m-n+k-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = m \overline{N} \cdot m \overline{N-k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{N} = & \frac{m}{m} \frac{N-k}{N-k} \cdot \frac{m-n+k}{K}; \frac{m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{[N-k]}{1 \cdot 2 \dots (n-k)} \cdot \frac{K^{m-n+k}}{1 \cdot 2 \dots (m-n+k)} \\
& + \frac{m}{m} \frac{N-k}{N-k} \cdot \frac{m-n+k-1}{K} \\
& + \frac{m}{m} \frac{N-k}{N-k} \cdot \frac{m-n+k-2}{K} \\
& \dots \dots \dots \\
& + \frac{m}{m} \frac{N-k}{N-k} \cdot \frac{K^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (m-k-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (k+1)} \\
& + \frac{m}{m} \frac{N-k}{N-k} \cdot \frac{K^k}{1 \cdot 2 \dots (m-k) \cdot 1 \cdot 2 \dots k}
\end{aligned}$$

Setzt man $k=p'$ und $n-k=p'$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{[P+P']}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = & \frac{P}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot \frac{P'^{m-p}}{1 \cdot 2 \dots (m-p)} + \frac{P^{p+1}}{1 \cdot 2 \dots (p+1)} \cdot \frac{P'^{m-p-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-p-1)} + \frac{P^{p+2}}{1 \cdot 2 \dots (p+2)} \cdot \frac{P'^{m-p-2}}{1 \cdot 2 \dots (m-p-2)} \\
& + \dots + \frac{P^{m-p'-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-p'-1)} \cdot \frac{P'^{p'+1}}{1 \cdot 2 \dots (p'+1)} + \frac{P^{m-p'}}{1 \cdot 2 \dots (m-p')} \cdot \frac{P'^{p'}}{1 \cdot 2 \dots p'}
\end{aligned}$$

§. 20.

Euler hat in den *Institutionibus Calculi differentialis*, Tom. II. Cap. VII. §. 167. — 171., bewiesen, daß die Summe der endlichen Reihe

$$ap, bp^2, cp^3, dp^4, \dots zp^x$$

durch

$$S \cdot p^x z = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left\{ z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta d^2 z}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\delta d^4 z}{dx^4} - \dots \right\}$$

ausgedrückt wird, wo die unveränderlichen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. f. f. aus folgenden Gleichungen recurrierend bestimmt werden:

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1} \left(\frac{\alpha}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1} \left(\frac{\beta}{1} + \frac{\alpha}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1} \left(\frac{\gamma}{1} + \frac{\beta}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)$$

u. f. f.

u. f. f.

In §. 172. und §. 173. a. a. O. giebt *Euler* auch independente Ausdrücke dieser Coef.

ficienten, aber ohne Beweis, welcher sich auf folgende Art mit Hülfe einiger der obigen Sätze führen läßt. ^{b)}

§. 21.

Man setze $\frac{1}{p-1} = q$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$, $\gamma = \alpha_3$, $\delta = \alpha_4$, u. f. f., so sind die Gleichungen:

$$\alpha_1 = q$$

$$\alpha_2 = q \left(\frac{\alpha_1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \right)$$

$$\alpha_3 = q \left(\frac{\alpha_2}{1} + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)$$

$$\alpha_4 = q \left(\frac{\alpha_3}{1} + \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)$$

$$\alpha_5 = q \left(\frac{\alpha_4}{1} + \frac{\alpha_3}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right)$$

u. f. f. u. f. f.

$$\alpha_n = q \left(\frac{\alpha_{n-1}}{1} + \frac{\alpha_{n-2}}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha_{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha_{n-4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \right)$$

u. f. f. u. f. f.

Also

$$1) \quad \alpha_1 = \frac{q}{1} = \frac{1^1 q}{1}$$

$$2) \quad \alpha_2 = \frac{1^1 q^2}{1} + \frac{q}{1 \cdot 2} = \frac{2^1 q^2 + q}{1 \cdot 2} = \frac{2^2 q^2 + 2^1 q}{1 \cdot 2}$$

$$3) \quad \alpha_3 = \frac{2^2 q^3}{1 \cdot 2} + \frac{2^1 q^2}{1 \cdot 2} + \frac{1^1 q^2}{1 \cdot 2} + \frac{q}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2^2 q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^1 q^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1} \cdot \frac{1^1 q^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{q}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{3^3 q^3 + 3^2 q^2 + 3^1 q}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad (\S. 19. 1.)$$

4) Hieraus schließt man leicht, daß allgemein seyn wird

$$\alpha_n = \frac{N^n q^n + [N^n - 1] q^{n-1} + [N^n - 2] q^{n-2} + \dots + 2^2 q^2 + 2^1 q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

Denn gelte dieses Gesetz für α_1 , α_2 , α_3 , u. f. f. α_{n-1} , α_n , so ist

$$\alpha_{n+1} = q \left(\frac{\alpha_n}{1} + \frac{\alpha_{n-1}}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha_{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha_{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2 \dots n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \right)$$

b) Die Summe der unendlichen Reihe ap , bp^2 , cp^3 , dp^4 , $\dots$, zp^x , u. f. f., ist

$$= -\frac{p}{1-p} \left\{ z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta d^2 z}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \dots \right\}$$

für $x=0$, worüber des Herrn Hofraths Pfaff Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788. 8. S. 69. nachzusehen ist.

$$\begin{aligned}
&= \frac{N}{1 \cdot 1 \dots n} q^{n+1} + \frac{[N-1]}{1 \cdot 1 \dots n} q^n + \frac{[N-2]}{1 \cdot 1 \dots n} q^{n-1} + \frac{[N-3]}{1 \cdot 1 \dots n} q^{n-2} + \dots + \frac{A}{1 \cdot 1 \dots n} q^2 \\
&\quad + \frac{[N-1]}{1 \cdot 2 \cdot 1 \dots (n-1)} q^n + \frac{[N-2]}{1 \cdot 2 \cdot 1 \dots (n-1)} q^{n-1} + \frac{[N-3]}{1 \cdot 2 \cdot 1 \dots (n-1)} q^{n-2} + \dots + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 1 \dots (n-1)} q^2 \\
&\quad + \frac{[N-2]}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \dots (n-2)} q^{n-1} + \frac{[N-3]}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \dots (n-2)} q^{n-2} + \dots + \frac{A}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \dots (n-2)} q^2 \\
&\quad + \frac{[N-3]}{1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \dots (n-3)} q^{n-2} + \dots + \frac{A}{1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \dots (n-3)} q^2 \\
&\quad \dots \dots \dots \\
&\quad + \frac{A^2}{1 \dots (n-1) \cdot 1 \cdot 2} q^2 \\
&\quad + \frac{A}{1 \dots n \cdot 1} q^2 \\
&\quad + \frac{q}{1 \dots (n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+1}{1} N \cdot \frac{q^{n+1}}{1 \dots (n+1)} \\
&\quad + \left\{ \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} [N-1] + \frac{n+1}{1} [N-1] \right\} \cdot \frac{q^n}{1 \dots (n+1)} \\
&\quad + \left\{ \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [N-2] + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} [N-2] + \frac{n+1}{1} [N-2] \right\} \cdot \frac{q^{n-1}}{1 \dots (n+1)} \\
&\quad + \left\{ \frac{(n+1) \dots (n-2)}{1 \dots 4} [N-3] + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [N-3] + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} [N-3] + \frac{n+1}{1} [N-3] \right\} \cdot \frac{q^{n-2}}{1 \dots (n+1)} \\
&\quad \quad \quad \text{u. f. f.} \quad \quad \quad \text{u. f. f.} \\
&\quad + \left\{ \frac{(n+1) \dots 3}{1 \dots (n-1)} B^2 + \frac{(n+1) \dots 4}{1 \dots (n-2)} B^2 + \frac{(n+1) \dots 5}{1 \dots (n-3)} B^2 + \dots + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^2 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} B^2 + \frac{n+1}{1} B^2 \right\} \cdot \frac{q^3}{1 \dots (n+1)} \\
&\quad + \left\{ \frac{(n+1) \dots 2}{1 \dots n} A + \frac{(n+1) \dots 3}{1 \dots (n-1)} A^2 + \frac{(n+1) \dots 4}{1 \dots (n-2)} A^2 + \dots + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^2 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} A^2 + \frac{n+1}{1} A^2 \right\} \cdot \frac{q^2}{1 \dots (n+1)} \\
&\quad + \frac{q}{1 \dots (n+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{[N+1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} q^{n+1} + \frac{[N]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} q^n + \frac{[N-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} q^{n-1} + \frac{[N-2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} q^{n-2} + \dots + Cq^3 + Bq^2 + Aq \quad (\S. 19. 1.)$$

und das bemerkte Gesetz gilt also auch für α_{n+1} und ist folglich allgemein.

Aus der Tafel §. 4. erhält man also leicht

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{q}{1}$$

$$\beta = \alpha_2 = \frac{2q^2 + q}{1 \cdot 2}$$

$$\gamma = \alpha_3 = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\delta = \alpha_4 = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\varepsilon = \alpha_5 = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\zeta = \alpha_6 = \frac{170q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

u. f. f.

u. f. f.

Dies sind die Formeln in *Euler's Instit. Calculi different.* §. 172.

§. 22.

Ehe wir zu dem Beweise der andern Euler'schen Formeln übergehen, schicken wir noch folgenden Satz von den Binomial - Coefficienten voraus.

Für jedes p und q ist

$$p^n + p^{n-1} \cdot q + p^{n-2} \cdot q^2 + \dots + p^{n-n+1} \cdot q^{n-2} + 1 \cdot q^{n-1} = p+q$$

Beweis.

$$1) \ n = 1. \quad p + 1 \cdot q = p+q.$$

$$2) \ n = 2.$$

$$\begin{aligned} p^2 + p^{n-1} \cdot q + 1 \cdot q^2 &= p^2 + p \cdot q + q^2 = \\ &\quad - p \cdot q \\ &= p^2 + p \cdot q + q^2 = p^2 + p \cdot q + q^2 = p+q. \quad i) \end{aligned}$$

$$3) \ n = 3.$$

$$\begin{aligned} p^3 + p^{n-1} \cdot q + p^{n-2} \cdot q^2 + q^3 &= p^3 + p^2 \cdot q + p \cdot q^2 + q^3 = \\ &\quad - p^{n-1} \cdot q - 1 \cdot q^2 \\ &= p^3 + p^2 \cdot q + p \cdot q^2 + q^3 = p^3 + p^2 \cdot q + p \cdot q^2 + q^3 = \\ &\quad - p^{n-1} \cdot q - 1 \cdot q^2 \\ &= p^3 + p^2 \cdot q + p \cdot q^2 + q^3 = p^3 + p^2 \cdot q + p \cdot q^2 + q^3 = \\ &\quad - 1 \cdot q^2 - 1 \cdot q^2 \\ &= p^3 + p^2 \cdot q + p \cdot q^2 + q^3 = p+q. \quad i) \end{aligned}$$

i) Klügel a. a. O. S. 321.

4) $n = 4$.

$$\begin{aligned}
pD + p^{-1}E . qM + p^{-2}B . q+1B + p^{-3}M . q+2E + q+3D &= pD + pE . qM + p^{-1}B . q+1B + p^{-2}M . q+2E + q+3D \\
&\quad - p^{-1}B . qM - p^{-2}M . q+1B - I . q+2E \\
&= pD + pE . qM + p^{-1}B . qB + p^{-2}M . q+1E + q+2D \\
&= pD + pE . qM + pB . qB + p^{-1}M . q+1E + q+2D \\
&\quad - p^{-1}M . qB - I . q+1E \\
&= pD + pE . qM + pB . qB + p^{-1}M . qE + q+1D \\
&= pD + pE . qM + pB . qB + pM . qE + q+1D \\
&\quad - I . qE \\
&= pD + pE . qM + pB . qB + pM . qE + qD \\
&= p+qD . i)
\end{aligned}$$

5) Man sieht nun schon, wie unser Satz immer auf den Satz von den Binomial-Coefficienten, auf welchen sich der einleuchtendste Beweis des binomischen Lehrsatzes in grösster Allgemeinheit vorzüglich gründet, zurückgeführt werden kann.

§. 23.

Für jedes m ist

$$N^m - [N-1]^m \cdot m - n+1 \mathfrak{A} + [N-2]^m \cdot m - n+2 \mathfrak{B} - \dots \pm C \cdot m-3 \mathfrak{C} \mp B \cdot m-2 \mathfrak{C} \pm A \cdot m-1 \mathfrak{C}$$

$$= n^m - m+1 \mathfrak{A} (n-1)^m + m+1 \mathfrak{B} (n-2)^m - \dots \pm m+1 \mathfrak{C} \cdot 3^m \mp m+1 \mathfrak{C} \cdot 2^m \pm m+1 \mathfrak{C} \cdot 1^m$$

Beweis.

Man bezeichne die erstere Reihe durch S , so ist

[illegible]

$$\begin{aligned} & \mp \{ \bar{n}^2 + \bar{n-1}^3 \cdot m-n+1 \mathfrak{A} + \bar{n-2}^4 \cdot m-n+2 \mathfrak{B} + \bar{n-3}^5 \cdot m-n+3 \mathfrak{C} + \dots + \bar{m-2}^2 \} \cdot 2^m \\ & \mp \{ \bar{n}^1 + \bar{n-1}^2 \cdot m-n+1 \mathfrak{A} + \bar{n-2}^3 \cdot m-n+2 \mathfrak{B} + \bar{n-3}^4 \cdot m-n+3 \mathfrak{C} + \dots + \bar{2}^1 \cdot m-2 \bar{n}^2 + \bar{m-1}^1 \} \cdot 1^m \\ & = n^m - {}^{m+1}\mathfrak{A}(n-1)^m + {}^{m+1}\mathfrak{B}(n-2)^m - {}^{m+1}\mathfrak{C}(n-3)^m + \dots \mp {}^{m+1}\bar{n}^2 \cdot 2^m \pm {}^{m+1}\bar{n}^1 \cdot 1^m \quad (\S. 22.) \end{aligned}$$

§. 24.

Es war nun

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{{}^n N q^n + [N-1] q^{n-1} + [N-2] q^{n-2} + \dots + \bar{C} q^3 + \bar{B} q^2 + \bar{A} q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\ &= \frac{\bar{A}(p-1)^{n-1} + \bar{B}(p-1)^{n-2} + \bar{C}(p-1)^{n-3} + \bar{D}(p-1)^{n-4} + \dots + [N-1](p-1) + \bar{N}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (p-1)^n} \\ &= \frac{Z}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (p-1)^n}. \end{aligned}$$

Der Zähler Z ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} &= \bar{A} p^{n-1} - \bar{A} {}^{n-1}\mathfrak{A} p^{n-2} + \bar{A} {}^{n-1}\mathfrak{B} p^{n-3} - \dots \mp \bar{A} {}^{n-1}\bar{n}^2 p \pm \bar{A} {}^{n-1}\bar{n}^1 \\ & \quad + \bar{B} p^{n-2} - \bar{B} {}^{n-2}\mathfrak{A} p^{n-3} + \dots \pm \bar{B} {}^{n-2}\bar{n}^3 p \mp \bar{B} {}^{n-2}\bar{n}^2 \\ & \quad + \bar{C} p^{n-3} - \dots \mp \bar{C} {}^{n-3}\bar{n}^4 p \pm \bar{C} {}^{n-3}\bar{n}^3 \\ & \quad \dots \dots \dots \\ & \quad + [N-1] p - [N-1] {}^1\mathfrak{A} \\ & \quad + \bar{N} \\ &= \bar{A} p^{n-1} \\ & \quad + \{ \bar{B} - \bar{A} \cdot {}^{n-1}\mathfrak{A} \} p^{n-2} \\ & \quad + \{ \bar{C} - \bar{B} \cdot {}^{n-2}\mathfrak{A} + \bar{A} \cdot {}^{n-1}\mathfrak{B} \} p^{n-3} \\ & \quad \dots \dots \dots \\ & \quad + \{ [N-1] - [N-2] \cdot {}^2\mathfrak{A} + [N-3] \cdot {}^3\mathfrak{B} - \dots \pm \bar{B} \cdot {}^{n-2}\bar{n}^3 \mp \bar{A} \cdot {}^{n-2}\bar{n}^2 \} p \\ & \quad + \{ \bar{N} - [N-1] \cdot {}^1\mathfrak{A} + [N-2] \cdot {}^2\mathfrak{B} - \dots \mp \bar{B} \cdot {}^{n-2}\bar{n}^2 \pm \bar{A} \cdot {}^{n-1}\bar{n}^1 \} \\ &= p^{n-1} \\ & \quad + \{ 2^n - {}^{n+1}\mathfrak{A} \cdot 1^n \} p^{n-2} \\ & \quad + \{ 3^n - {}^{n+1}\mathfrak{A} \cdot 2^n + {}^{n+1}\mathfrak{B} \cdot 1^n \} p^{n-3} \\ & \quad \dots \dots \dots \\ & \quad + \{ (n-1)^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}(n-2)^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}(n-3)^n - \dots \pm {}^{n+1}\bar{n}^2 \cdot 1^n \} p \\ & \quad + n^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}(n-1)^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}(n-2)^n - \dots \mp {}^{n+1}\bar{n}^1 \cdot 1^n \quad (\S. 25.) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} p^{n-1} + \begin{bmatrix} 2 \\ n \end{bmatrix} p^{n-2} + \begin{bmatrix} 3 \\ n \end{bmatrix} p^{n-3} + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wenn überhaupt die Reihe

$$m^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}(m-1)^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}(m-2)^n - \dots \pm {}^{n+1}\mathfrak{M} \cdot 1^n$$

durch $[n]$ bezeichnet wird.

Es ist also

$$a_n = \frac{[n]p^{n-1} + [n]p^{n-2} + [n]p^{n-3} + [n]p^{n-4} + \dots + [n]p + [n]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(p-1)^n}.$$

M. f. *Euler's Institutiones Calculi differentialis*, T. II. §. 173.

§. 25.

Man kann aus den bisherigen Sätzen auch ein Paar **independenten** Formeln für die Bernoulli'schen Zahlen ableiten.

Man setze den Bruch $\frac{1}{1 - qy - \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}qy^3 - \frac{1}{24}qy^4 - \frac{1}{120}qy^5 - \dots} = Y =$

$$= A + \mathfrak{A}_1 y + \mathfrak{A}_2 y^2 + \mathfrak{A}_3 y^3 + \mathfrak{A}_4 y^4 + \mathfrak{A}_5 y^5 + \dots$$

Also

$$1 = A + \mathfrak{A}_1 y + \mathfrak{A}_2 y^2 + \mathfrak{A}_3 y^3 + \mathfrak{A}_4 y^4 + \mathfrak{A}_5 y^5 + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} - qA \\ - \frac{1}{2}qA \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - q\mathfrak{A}_1 \\ - \frac{1}{2}q\mathfrak{A}_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - \frac{1}{2}q\mathfrak{A}_2 \\ - \frac{1}{6}q\mathfrak{A}_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - \frac{1}{6}q\mathfrak{A}_3 \\ - \frac{1}{24}q\mathfrak{A}_3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - \frac{1}{24}q\mathfrak{A}_4 \\ - \frac{1}{120}q\mathfrak{A}_4 \end{array} \right\} \dots$$

Also

$$A = 1$$

$$\mathfrak{A}_1 = q$$

$$\mathfrak{A}_2 = q \left(\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$\mathfrak{A}_3 = q \left(\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{6} \right)$$

$$\mathfrak{A}_4 = q \left(\mathfrak{A}_3 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{6}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{24} \right)$$

$$\mathfrak{A}_5 = q \left(\mathfrak{A}_4 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_3 + \frac{1}{6}\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{24}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{120} \right)$$

u. f. f.

u. f. f.

Aber $q = \frac{1}{p-1}$ (§. 21.), also $\mathfrak{A}_1 = \alpha_1, \mathfrak{A}_2 = \alpha_2, \mathfrak{A}_3 = \alpha_3, \mathfrak{A}_4 = \alpha_4, \text{ u. f. f., } (\S. 21.),$ und folglich $Y = 1 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 + \alpha_5 y^5 + \dots$

§. 26.

Aber $Y = \frac{1}{1-q(e^y-1)} = \frac{p-1}{p-e^y}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen. Also

$$e^y = \frac{pY-p+1}{Y}, \quad y = \text{Logn}(pY-p+1) - \text{Logn} Y$$

$$dy = \frac{(p-1)dY}{Y(pY-p+1)}, \quad \frac{(p-1)dY}{dy} = pY^2 - (p-1)Y =$$

$$= (p+1)Y - p + pY^2 - (p-1)Y - (p+1)Y + p$$

$$= (p+1)Y - p + p(Y^2 - 2Y + 1)$$

$$= (p+1)Y - p + p(Y-1)^2.$$

$$\frac{dY}{dy} = \alpha_1 + 2\alpha_2 y + 3\alpha_3 y^2 + 4\alpha_4 y^3 + 5\alpha_5 y^4 + \dots$$

$$(p+1)Y - p = 1 + (p+1)\alpha_1 y + (p+1)\alpha_2 y^2 + (p+1)\alpha_3 y^3 + (p+1)\alpha_4 y^4 + \dots$$

$$(Y-1)^2 = \alpha_1 \alpha_1 y^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 y^3 + 2\alpha_1 \alpha_3 y^4 + 2\alpha_1 \alpha_4 y^5 + 2\alpha_1 \alpha_5 y^6 + 2\alpha_1 \alpha_6 y^7 + \dots$$

$$+ \alpha_2 \alpha_2 y^3 + 2\alpha_2 \alpha_3 y^4 + 2\alpha_2 \alpha_4 y^5 + 2\alpha_2 \alpha_5 y^6 + 2\alpha_2 \alpha_6 y^7 + \dots$$

$$+ \alpha_3 \alpha_3 y^4 + 2\alpha_3 \alpha_4 y^5 + 2\alpha_3 \alpha_5 y^6 + 2\alpha_3 \alpha_6 y^7 + \dots$$

Also

$$(p-1)\alpha_1 = 1$$

$$2(p-1)\alpha_2 = (p+1)\alpha_1$$

$$3(p-1)\alpha_3 = (p+1)\alpha_2 + p\alpha_1\alpha_1$$

$$4(p-1)\alpha_4 = (p+1)\alpha_3 + 2p\alpha_1\alpha_2$$

$$5(p-1)\alpha_5 = (p+1)\alpha_4 + 2p\alpha_1\alpha_3 + p\alpha_2\alpha_2$$

$$6(p-1)\alpha_6 = (p+1)\alpha_5 + 2p\alpha_1\alpha_4 + 2p\alpha_2\alpha_3$$

$$7(p-1)\alpha_7 = (p+1)\alpha_6 + 2p\alpha_1\alpha_5 + 2p\alpha_2\alpha_4 + p\alpha_3\alpha_3$$

$$8(p-1)\alpha_8 = (p+1)\alpha_7 + 2p\alpha_1\alpha_6 + 2p\alpha_2\alpha_5 + 2p\alpha_3\alpha_4$$

u. f. f.

u. f. f.

Da nun $\alpha_2 = 0$ für $p = -1$, so ist auch $\alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_{10} = \text{u. f. f.} = 0$ für $p = -1$; es ist also nach §. 21. für $p = 1$:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot \dots \cdot 5} \right)$$

$$\alpha_7 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_5}{1.2} + \frac{\alpha_3}{1..4} + \frac{\alpha_1}{1..6} + \frac{1}{1..7} \right)$$

$$\alpha_9 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_7}{1.2} + \frac{\alpha_5}{1..4} + \frac{\alpha_3}{1..6} + \frac{\alpha_1}{1..8} + \frac{1}{1..9} \right)$$

u. f. f. u. f. f.

§. 27.

Man entwickle jetzt den Bruch

$$\frac{y - \frac{1}{1.2.3}y^3 + \frac{1}{1..5}y^5 - \frac{1}{1..7}y^7 + \frac{1}{1..9}y^9 - \dots}{2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{1..4}y^4 - \frac{1}{1..6}y^6 + \frac{1}{1..8}y^8 - \dots} = Z$$

in eine Reihe, indem man setzt $Z = \mathfrak{A}_1 y + \mathfrak{A}_3 y^3 + \mathfrak{A}_5 y^5 + \mathfrak{A}_7 y^7 + \mathfrak{A}_9 y^9 + \dots$

Also

$$\begin{aligned} & y - \frac{1}{1.2.3}y^3 + \frac{1}{1..5}y^5 - \frac{1}{1..7}y^7 + \frac{1}{1..9}y^9 - \dots \\ = & 2\mathfrak{A}_1 y + \left. \begin{array}{l} 2\mathfrak{A}_3 \\ -\frac{1}{1.2}\mathfrak{A}_1 \end{array} \right\} y^3 + \left. \begin{array}{l} 2\mathfrak{A}_5 \\ -\frac{1}{1.2}\mathfrak{A}_3 \\ +\frac{1}{1..4}\mathfrak{A}_1 \end{array} \right\} y^5 + \left. \begin{array}{l} 2\mathfrak{A}_7 \\ -\frac{1}{1.2}\mathfrak{A}_5 \\ +\frac{1}{1..4}\mathfrak{A}_3 \\ -\frac{1}{1..6}\mathfrak{A}_1 \end{array} \right\} y^7 + \left. \begin{array}{l} 2\mathfrak{A}_9 \\ -\frac{1}{1.2}\mathfrak{A}_7 \\ +\frac{1}{1..4}\mathfrak{A}_5 \\ -\frac{1}{1..6}\mathfrak{A}_3 \\ +\frac{1}{1..8}\mathfrak{A}_1 \end{array} \right\} y^9 + \dots \end{aligned}$$

Also

$$1) \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} = -\alpha_1 \text{ für } p = -1$$

$$\begin{aligned} 2) \mathfrak{A}_3 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathfrak{A}_1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{-\mathfrak{A}_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \right\} (1.) = \alpha_3 \text{ für } p = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \mathfrak{A}_5 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathfrak{A}_3}{1.2} - \frac{\mathfrak{A}_1}{1..4} + \frac{1}{1..5} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_3}{1.2} + \frac{\alpha_1}{1..4} + \frac{1}{1..5} \right\} (1. 2.) \\ &= -\alpha_5 \text{ für } p = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \mathfrak{A}_7 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathfrak{A}_5}{1.2} - \frac{\mathfrak{A}_3}{1..4} + \frac{\mathfrak{A}_1}{1..6} - \frac{1}{1..7} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mathfrak{A}_5}{1.2} + \frac{\mathfrak{A}_3}{1..4} - \frac{\mathfrak{A}_1}{1..6} + \frac{1}{1..7} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_5}{1.2} + \frac{\alpha_3}{1..4} + \frac{\alpha_1}{1..6} + \frac{1}{1..7} \right\} = \alpha_7 \text{ für } p = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \mathfrak{A}_9 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathfrak{A}_7}{1 \cdot 2} - \frac{\mathfrak{A}_5}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\mathfrak{A}_3}{1 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{\mathfrak{A}_1}{1 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{1 \cdot 9} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_7}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha_5}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\alpha_3}{1 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{1 \cdot 9} \right\} = \alpha_9 \text{ für } p = -1. \\
 &\quad \text{u. f. f.} \qquad \qquad \text{u. f. f.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Also } Z = -\alpha_1 y + \alpha_3 y^3 - \alpha_5 y^5 + \alpha_7 y^7 - \alpha_9 y^9 + \dots$$

§. 23.

Es ist aber $Z = \frac{\sin y}{1 + \cos y} = \text{Tang } \frac{1}{2} y$. Also für $y = 2x$:

$$\begin{aligned}
 \text{Tang } x &= -\alpha_1 (2x) + \alpha_3 (2x)^3 - \alpha_5 (2x)^5 + \alpha_7 (2x)^7 - \alpha_9 (2x)^9 + \dots \\
 &= -2 \cdot \alpha_1 x + 2^3 \cdot \alpha_3 x^3 - 2^5 \cdot \alpha_5 x^5 + 2^7 \cdot \alpha_7 x^7 - 2^9 \cdot \alpha_9 x^9 + \dots \text{ für } p = -1.
 \end{aligned}$$

Es ist aber bekanntlich

$$\text{Tang } x = \frac{2^2 (2^2 - 1) \mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} x + \frac{2^4 (2^4 - 1) \mathfrak{B}^2}{1 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \frac{2^6 (2^6 - 1) \mathfrak{B}^3}{1 \cdot 5 \cdot 6} x^5 + \frac{2^8 (2^8 - 1) \mathfrak{B}^4}{1 \cdot 7 \cdot 8} x^7 + \dots$$

wo $\mathfrak{B}^1$ die erste, $\mathfrak{B}^2$ die zweyte, $\mathfrak{B}^3$ die dritte, u. f. w. Bernoulli'sche Zahl, (s. die erste Abhandlung §. 23.). Also

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{2(2^2-1)\mathfrak{B}^1}{1 \cdot 2} &= -\alpha_1 \\
 \frac{2(2^4-1)\mathfrak{B}^2}{1 \cdot 3 \cdot 4} &= \alpha_3 \\
 \frac{2(2^6-1)\mathfrak{B}^3}{1 \cdot 5 \cdot 6} &= -\alpha_5 \\
 \frac{2(2^8-1)\mathfrak{B}^4}{1 \cdot 7 \cdot 8} &= \alpha_7 \\
 \frac{2(2^{10}-1)\mathfrak{B}^5}{1 \cdot 9 \cdot 10} &= -\alpha_9 \\
 &\text{u. f. f.}
 \end{aligned} \right\} \text{ für } p = -1.$$

und folglich allgemein

$$\frac{2(2^{2n}-1)\mathfrak{B}^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n} = \pm \alpha_{2n-1} \text{ für } p = -1.$$

$$\pm \text{ wenn } n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}.$$

Für $p = -1$ ist aber

$$\begin{aligned} \alpha_{2n-1} &= \frac{-[2N-1] + 2 \cdot [2N-2] - 2^2 \cdot [2N-3] + \dots + 2^{2n-3} \cdot B - 2^{2n-2} \cdot A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2^{2n-1}} \quad (\S. 21.) \\ &= \frac{-[2n-1] + [2n-1] - [2n-1] + [2n-1] - \dots + [2n-1] - [2n-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2^{2n-1}} \quad (\S. 24.) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{2(2^{2n}-1)\mathfrak{B}}{1 \cdot 2 \dots 2n} &= \mp \frac{[2N-1] - 2 \cdot [2N-2] + 2^2 \cdot [2N-3] - \dots - 2^{2n-3} \cdot B + 2^{2n-2} \cdot A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2^{2n-1}} \\ &= \mp \frac{[2n-1] - [2n-1] + [2n-1] - [2n-1] + \dots - [2n-1] + [2n-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2^{2n-1}} \\ \mathfrak{B} &= \mp \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \{ [2N-1] - 2 \cdot [2N-2] + 2^2 \cdot [2N-3] - \dots - 2^{2n-3} \cdot B + 2^{2n-2} \cdot A \} \\ &= \mp \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \{ [2n-1] - [2n-1] + [2n-1] - [2n-1] + \dots - [2n-1] + [2n-1] \} \\ &\quad \mp \text{wenn } n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

§. 29.

Da $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \text{u. f. f.} = \alpha_{2n} = \text{u. f. f.} = 0$ für $p = -1$, (§. 26.), so ist

$$\begin{aligned} 0 &= [2N] - 2 \cdot [2N-1] + 2^2 \cdot [2N-2] - \dots + 2^{2n-2} \cdot B - 2^{2n-1} \cdot A \\ &= [2n] - [2n] + [2n] - [2n] + \dots + [2n] - [2n] \text{ nach §. 21. und §. 24.} \end{aligned}$$

Die Entwickelung
der Pflanzen und Thiere
in Hessen

Ueber
die Entwicklung
der Potenzen und Logarithmen
in Reihen.

§. 1.

Die Beweise dieser Reihen, welche nach der Methode der unbestimmten Coefficienten geführt werden, beruhen alle auf der Voraussetzung, daß sich die diesen Reihen entsprechenden Functionen in Reihen entwickeln lassen, welche nach den positiven ganzen Potenzen der als veränderlich angenommenen GröÙe fortschreiten, und es gelten hier überhaupt alle Bemerkungen, welche ich in der ersten Abhandlung S. 1. und 2. über die Reihe für den Sinus gemacht habe. Meine Absicht bey gegenwärtigem Aufsatze geht nun vorzüglich dahin, die obige Voraussetzung in allen Fällen immer vollständig zu rechtfertigen, welches bey diesen Beweisen gewöhnlich nicht zu geschehen pflegt.

I. Die Binomial-Formel.

§. 2.

Alle Beweise dieser wichtigen Formel kann man, glaube ich, in drey Klassen theilen: 1) Beweise durch die gewöhnliche Multiplication; 2) Beweise durch die Methode der unbestimmten Coefficienten; und 3) Beweise durch die Differenzialrechnung. Bloß die Beweise der beiden ersten Klassen gehören in das Gebiet der niedern Analysis. Ob ich nun gleich den Beweisen der ersten Klasse nach den Darstellungen der Herren *Pfaff*, *L'Huilier* oder *Rothe* vor allen andern den Vorzug geben möchte, (meine Gründe werde ich vielleicht einmal in einer andern Abhandlung ausführlich aus einander setzen); so verdienen doch auch die Beweise der zweyten Klasse sehr beachtet zu werden, nur habe ich in diesen Beweisen die denselben zum Grunde liegende Voraussetzung: daß sich $(1+x)^m$ in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lasse, nie vollständig gerechtfertigt gefunden, und diese Rechtfertigung zu versuchen, ist hier mein vorzüglichster Zweck.

Ich betrachte zunächst bloß die Function $(1+x)^m$, da sich, wie wir unten sehen werden, aus der Entwicklung dieser Function die Entwicklung von $(y+x)^m$ unmittelbar ergibt.

§. 3.

a) Der Exponent sey eine positive ganze Zahl $= m$.

Durch die gemeine algebraische Multiplication erhält man leicht

$$\begin{aligned} 1+x &= 1+x, \\ (1+x)^2 &= 1+2x+x^2, \\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3, \\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4, \\ (1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5, \\ &\text{u. f. f.} \qquad \qquad \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

Man nehme nun an, daß sich $(1+x)^m$ in eine Reihe

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots$$

entwickeln lasse, so ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{m+1} &= (1+x)^m \cdot (1+x) = \\ &= A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots \\ &\quad + Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\dots \\ &= A+(A+B)x+(B+C)x^2+(C+D)x^3+\dots \end{aligned}$$

und es läßt sich folglich auch $(1+x)^{m+1}$ in eine Reihe entwickeln, weshalb man denn allgemein behaupten kann, daß $(1+x)^m$, wenn m eine positive ganze Zahl ist, immer in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden kann.

Das erste Glied ist in beiden Entwicklungen von $(1+x)^m$ und $(1+x)^{m+1}$, $= A$; daher wird A für alle Potenzen $= 1$ seyn, indem es für $1+x$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, u. f. w., $= 1$ ist.

Der Coefficient des zweyten Gliedes in $(1+x)^{m+1}$ ist $= A+B=1+B$. Nun ist dieser Coefficient

$$\begin{aligned} \text{in } 1+x, &= 1; \text{ also} \\ \text{in } (1+x)^2, &= 1+1=2; \text{ also} \\ \text{in } (1+x)^3, &= 1+2=3; \text{ also} \\ \text{in } (1+x)^4, &= 1+3=4; \\ &\text{u. f. f.} \qquad \qquad \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

also überhaupt in $(1+x)^m$, $= m$.

b) Der Exponent sey eine negative ganze Zahl $= -m$.

$$(1+x)^{-m} \text{ ist } = \frac{1}{(1+x)^m}.$$

Um nun zu zeigen, daß $(1+x)^{-m}$ in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden könne, muß man darthun, daß sich A, B, C, D , u. f. f. so bestimmen lassen, daß

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots)(1+x)^m = 1 \text{ ist;}$$

denn dann ist

$$\frac{1}{(1+x)^m} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

Da aber m eine positive ganze Zahl ist, so kann man

$$(1+x)^m = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \dots$$

setzen, und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, u. f. f. als bekannte Größen betrachten, (a.), wodurch sich die zu verificirende Gleichung in

$$1 = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots)(1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \dots)$$

oder

$$\begin{aligned} 1 = & A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots \\ & + A\mathfrak{A}x + B\mathfrak{A}x^2 + C\mathfrak{A}x^3 + D\mathfrak{A}x^4 + \dots \\ & + A\mathfrak{B}x^2 + B\mathfrak{B}x^3 + C\mathfrak{B}x^4 + \dots \\ & + A\mathfrak{C}x^3 + B\mathfrak{C}x^4 + \dots \\ & + A\mathfrak{D}x^4 + \dots \end{aligned}$$

verwandelt.

Damit diese Gleichung aber Statt finde, müssen A, B, C, D , u. f. f. so bestimmt werden, daß sie folgenden Gleichungen genügen:

$$A = 1$$

$$B + A\mathfrak{A} = 0$$

$$C + B\mathfrak{A} + A\mathfrak{B} = 0$$

$$D + C\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + A\mathfrak{C} = 0$$

$$E + D\mathfrak{A} + C\mathfrak{B} + B\mathfrak{C} + A\mathfrak{D} = 0$$

u. f. f. u. f. f.

Daß dies aber immer möglich sey, fällt in die Augen, und es wird sich daher auch $(1+x)^{-m}$, wenn m eine ganze Zahl ist, immer in eine Reihe nach Potenzen von x entwickeln lassen.

Da $A=1$ und $B + A\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{A}$ aber $= m$ (a.) ist; so ist $B + m = 0$, also $B = -m$. Zu der Bestimmung der übrigen Coefficienten werden wir weiter unten auf eine leichtere Art, als durch die obigen Gleichungen, gelangen.

c) Der Exponent sey ein positiver oder negativer Bruch $= \frac{m}{n}$.

Es erhellet leicht, daß man annehmen kann, daß sowohl m als auch n eine ganze Zahl, und n positiv ist.

Um nun zu zeigen, daß $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ in eine Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

entwickelt werden kann, muß man beweisen, daß A, B, C, D , u. f. f. so bestimmt werden können, daß

$$(1+x)^m = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots)^n = P^n$$

ist; denn dann ist

$$\sqrt[n]{(1+x)^m} = (1+x)^{\frac{m}{n}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

Da aber m eine ganze Zahl ist, so kann man

$$(1+x)^m = 1 + \mathcal{A}x + \mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x^3 + \mathcal{D}x^4 + \dots$$

setzen, und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, u. f. w. als bekannte Größen betrachten, (a. b.).

Auch ist klar, da n eine positive ganze Zahl ist, daß sich durch die gewöhnliche Multiplication

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots)^n$$

in eine Reihe

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \dots$$

entwickeln läßt, so daß sich also die obige zu verificirende Gleichung in folgende verwandelt:

$$1 + \mathcal{A}x + \mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x^3 + \mathcal{D}x^4 + \dots = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \dots$$

Damit diese Gleichung Statt finde, müssen die Coefficienten A, B, C, D , u. f. w. so bestimmt werden, daß sie diesen Gleichungen Genüge leisten:

$$A' = 1, B' = \mathcal{A}, C' = \mathcal{B}, D' = \mathcal{C}, E' = \mathcal{D}, \text{ u. f. f.}$$

Daß dies aber immer möglich sey, zeigt man auf folgende Art. Man kann nämlich behaupten:

- 1) daß alle Coefficienten A', B', C', D', E' , u. f. f. Functionen von A, B, C, D, E , u. f. f. sind;
 - 2) daß A' bloß A und nur in Einer Potenz enthält;
 - 3) daß B' bloß A und B , und B nur in der ersten Potenz enthält;
 - 4) daß C' bloß A, B, C , und C nur in der ersten Potenz enthält;
 - 5) daß D' bloß A, B, C, D , und D nur in der ersten Potenz enthält;
- u. f. f. u. f. f.

Denn man nehme diese Sätze für irgend eine Potenz P^n von P als richtig an, so gelten sie auch für die nächst höhere Potenz P^{n+1} . Denn durch die Multiplication erhält man:

$$\begin{aligned}
P^{n+1} = & AA' + AB'x + AC'x^2 + AD'x^3 + AE'x^4 + \dots \\
& + BA'x + BB'x^2 + BC'x^3 + BD'x^4 + \dots \\
& + CA'x^2 + CB'x^3 + CC'x^4 + \dots \\
& + DA'x^3 + DB'x^4 + \dots \\
& + EA'x^4 + \dots
\end{aligned}$$

- 1) A' enthält nach der Voraussetzung bloß A , und nur in Einer Potenz; also auch AA' .
- 2) B' enthält bloß A und B , und B nur in der ersten Potenz; also offenbar auch $AB' + BA'$, da A' nur A enthält.
- 3) C' enthält bloß A , B , C , und C nur in der ersten Potenz; also offenbar auch $AC' + BB' + CA'$, da A' und B' nur A und B enthalten.
- 4) D' enthält bloß A , B , C , D , und D nur in der ersten Potenz; also offenbar auch $AD' + BC' + CB' + DA'$, da A' , B' , C' nur A , B , C enthalten.
- 5) Man verfährt ganz auf dieselbe Art auch bey den übrigen Coefficienten, und die oben ausgesprochenen Behauptungen gelten also für P^{n+1} , wenn sie für P^n gelten, und sind folglich allgemein richtig, da sie offenbar für die erste Potenz

$$P = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

richtig sind.

Hieraus erhellet nun unmittelbar, daß A , B , C , D , u. f. w. so bestimmt werden können, daß die obigen Gleichungen

$$A' = 1, B' = \mathfrak{A}, C' = \mathfrak{B}, D' = \mathfrak{C}, E' = \mathfrak{D}, \text{ u. f. f.}$$

erfüllt werden, und daß sich folglich $(1 + x)^{\frac{m}{n}}$ in eine Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

entwickeln läßt.

Durch Multiplication erhält man leicht

$$P = A + Bx + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} P_2 = & A^2 + ABx + \dots \\ & + BAx + \dots \end{aligned} \right\} = A^2 + 2A^1Bx + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} P_3 = & A^3 + 2A^2Bx + \dots \\ & + A^2Bx + \dots \end{aligned} \right\} = A^3 + 3A^2Bx + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} P_4 = & A^4 + 3A^3Bx + \dots \\ & + A^3Bx + \dots \end{aligned} \right\} = A^4 + 4A^3Bx + \dots$$

u. f. f. u. f. f.

Also allgemein $P^n = A^n + nA^{n-1}Bx + \dots$, so daß folglich $A' = A^n$ und $B' = nA^{n-1}B$.

Es ist also A und B so zu bestimmen, daß $A^n = 1$ und $nA^{n-1}B = \mathfrak{A} = m$ wird, woraus man erhält:

$$A = 1, \quad nB = m, \quad B = \frac{m}{n}.$$

§. 4.

In §. 3. ist bewiesen worden, daß $(1+x)^m$ für jedes m und jedes x immer in eine Reihe

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$$

entwickelt werden kann, wo A, B, C, D , u. f. f. beständige von x unabhängige Coefficienten sind; A ist $= m$.

Da $(y+x)^m = \left[y \left(1 + \frac{x}{y} \right) \right]^m = y^m \left(1 + \frac{x}{y} \right)^m$ ist, so ist

$$\begin{aligned} (y+x)^m &= y^m \left(1 + A \frac{x}{y} + B \frac{x^2}{y^2} + C \frac{x^3}{y^3} + D \frac{x^4}{y^4} + \dots \right) \\ &= y^m + Ay^{m-1}x + By^{m-2}x^2 + Cy^{m-3}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Also } (y+x+z)^m = [y+(x+z)]^m = y^m + Ay^{m-1}(x+z) + By^{m-2}(x+z)^2 + Cy^{m-3}(x+z)^3 + Dy^{m-4}(x+z)^4 + \dots$$

$= [(y+z) + x]^m = (y+z)^m + A(y+z)^{m-1}x + B(y+z)^{m-2}x^2 + C(y+z)^{m-3}x^3 + D(y+z)^{m-4}x^4 + \dots$
oder, wenn man die Potenzen von $x+z$ und $y+z$ entwickelt, und nach z ordnet, nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} y^m \\ + Ay^{m-1}x \\ + By^{m-2}x^2 \\ + Cy^{m-3}x^3 \\ + Dy^{m-4}x^4 \\ + \dots \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} Ay^{m-1} \\ + 2By^{m-2}x \\ + 3Cy^{m-3}x^2 \\ + 4Dy^{m-4}x^3 \\ + \dots \end{array} \right\} z + \dots = \left. \begin{array}{l} y^m \\ + Ay^{m-1}x \\ + By^{m-2}x^2 \\ + Cy^{m-3}x^3 \\ + Dy^{m-4}x^4 \\ + \dots \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} my^{m-1} \\ + (m-1)Ay^{m-2}x \\ + (m-2)By^{m-3}x^2 \\ + (m-3)Cy^{m-4}x^3 \\ + (m-4)Dy^{m-5}x^4 \\ + \dots \end{array} \right\} z + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Also } Ay^{m-1} + 2By^{m-2}x + 3Cy^{m-3}x^2 + 4Dy^{m-4}x^3 + \dots =$$

$$= my^{m-1} + (m-1)Ay^{m-2}x + (m-2)By^{m-3}x^2 + (m-3)Cy^{m-4}x^3 + (m-4)Dy^{m-5}x^4 + \dots$$

und für $y = 1$:

$$\begin{aligned} & A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots = \\ & = m + (m-1)Ax + (m-2)Bx^2 + (m-3)Cx^3 + (m-4)Dx^4 + \dots \end{aligned}$$

Also

$$A = m,$$

$$2B = (m-1)A = m(m-1),$$

$$2 \cdot 3C = 2(m-2)B = m(m-1)(m-2),$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4D = 2 \cdot 3(m-3)C = m(m-1)(m-2)(m-3),$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5E = 2 \cdot 3 \cdot 4(m-4)D = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4),$$

u. f. f.

u. f. f.

Also

$$A = \frac{m}{1},$$

$$B = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2},$$

$$C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$E = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

u. f. f. u. f. f.

und folglich

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots$$

oder

$$(y+x)^m = y^m + \frac{m}{1}y^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}y^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^{m-3}x^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}y^{m-4}x^4 + \dots$$

§. 5.

Anstatt der in §. 4. gewählten Darstellung kann man auch die Differenzialrechnung gebrauchen. Es erhellet nämlich aus §. 3., daß

$$(1+x)^m = 1 + mx + \dots,$$

also $(x + \Delta x)^m = \left[x \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right]^m = x^m \left(1 + \frac{m\Delta x}{x} + \dots \right) = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \dots$

$$(x + \Delta x)^m - x^m = mx^{m-1}\Delta x + \dots$$

Also $d \cdot x^m = mx^{m-1}\Delta x = mx^{m-1}dx$, nach der Erklärung des Differenzials.

Sey nun

$$(1+x)^m = 1 + mx + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \dots,$$

so ist

$$d \cdot (1+x)^m = m dx + 2A x dx + 3B x^2 dx + 4C x^3 dx + \dots$$

Wenn man $1 + x = y$ setzt, so ist $d \cdot (1+x)^m = d \cdot y^m = m y^{m-1} dy$; aber $dy = d(1+x) = dx$, also $d \cdot (1+x)^m = m(1+x)^{m-1} dx$, also

$$m(1+x)^{m-1} dx = m dx + 2A x dx + 3B x^2 dx + 4C x^3 dx + \dots$$

$$m(1+x)^{m-1} = m + 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + \dots$$

$$m(1+x)^m = m \left\{ \begin{matrix} + 2A \\ + m \end{matrix} \right\} x \left\{ \begin{matrix} + 3B \\ + 2A \end{matrix} \right\} x^2 \left\{ \begin{matrix} + 4C \\ + 3B \end{matrix} \right\} x^3 + \dots$$

$$= m + m^2 x + mA x^2 + mB x^3 + \dots$$

Also $2A = m^2 - m = m(m-1),$

$$2 \cdot 3 B = 2(mA - 2A) = 2(m-2)A = m(m-1)(m-2),$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 C = 2 \cdot 3(mB - 3B) = 2 \cdot 3(m-3)B = m(m-1)(m-2)(m-3),$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 D = 2 \cdot 3 \cdot 4(mC - 4C) = 2 \cdot 3 \cdot 4(m-4)C = m(m-1) \dots (m-4),$$

u. f. f. u. f. f.

Also $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots$$

wie vorher.

§. 6.

Bemerkung über die Potenzen mit imaginären Exponenten. Von einer Potenz A^i mit einem imaginären Exponenten läßt sich, glaube ich, keine deutlichere Erklärung geben, als wenn man sagt, eine solche Potenz ist nichts anderes als die Reihe

$$(1+A-1)^i = 1 + \frac{i}{1} (A-1) + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} (A-1)^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (A-1)^3 + \dots$$

Weitere Auseinandersetzungen hierüber werden vielleicht der Gegenstand einer der folgenden Abhandlungen seyn.

II. Die Exponential-Größen.

§. 7.

Um die Exponential-Größe a^x in eine Reihe zu entwickeln, setze man $a = 1 + b$, so giebt die Binomial-Formel:

$$a^x = (1+b)^x = 1 + \frac{x}{1} b + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 + \dots$$

Entwickelt man nun die Binomial-Coefficienten nach Potenzen von x , welches offenbar immer möglich ist, so erhält man für a^x eine Reihe

$$1 + Ax + \frac{A^2}{2} x^2 + \frac{A^3}{6} x^3 + \frac{A^4}{24} x^4 + \dots + \frac{A^n}{n!} x^n + \dots,$$

welche für jedes x gilt.

Es ist folglich $a^{2x} = 1 + 2Ax + 2^2 \cdot \frac{A^2}{2} x^2 + 2^3 \cdot \frac{A^3}{6} x^3 + 2^4 \cdot \frac{A^4}{24} x^4 + \dots + 2^n \cdot \frac{A^n}{n!} x^n + \dots$

Nun ist aber auch $a^{2x} = (a^x)^2 = (1 + Ax + \frac{A^2}{2} x^2 + \frac{A^3}{6} x^3 + \frac{A^4}{24} x^4 + \dots + \frac{A^n}{n!} x^n + \dots)^2;$

$$= \frac{2^3 \cdot \overset{1}{A^3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2 \cdot \overset{1}{A^3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(2^3 - 2) \cdot \overset{1}{A^3}}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

$$\text{Also } A^3 = \frac{\overset{1}{A^3}}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Auf ähnliche Art erhält man $\overset{4}{A} = \frac{\overset{1}{A^4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, $\overset{5}{A} = \frac{\overset{1}{A^5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, u. f. w. u. f. w.

Gelte nun dieses Gesetz bis zu $\overset{n-1}{A}$, d. i. für $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, u. f. f., $\overset{n-2}{A}$, $\overset{n-1}{A}$; so wird es auch für $\overset{n}{A}$ gelten, und folglich allgemein gültig seyn, da es bis zu $\overset{3}{A}$ bewiesen worden.

Es ist nämlich

$$2^n \cdot \overset{n}{A} = \overset{n}{A} + \overset{1}{A} \overset{n-1}{A} + \overset{2}{A} \overset{n-2}{A} + \overset{3}{A} \overset{n-3}{A} + \overset{4}{A} \overset{n-4}{A} + \dots + \overset{n-1}{A} \overset{1}{A} + \overset{n}{A}$$

Also

$$\begin{aligned} (2^n - 2) \overset{n}{A} &= \overset{1}{A} \overset{n-1}{A} + \overset{2}{A} \overset{n-2}{A} + \overset{3}{A} \overset{n-3}{A} + \overset{4}{A} \overset{n-4}{A} + \dots + \overset{n-1}{A} \overset{1}{A} \\ &= \frac{\overset{1}{A}}{1} \cdot \frac{\overset{1}{A^{n-1}}}{1 \dots (n-1)} + \frac{\overset{1}{A^2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\overset{1}{A^{n-2}}}{1 \dots (n-2)} + \frac{\overset{1}{A^3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\overset{1}{A^{n-3}}}{1 \dots (n-3)} + \frac{\overset{1}{A^4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\overset{1}{A^{n-4}}}{1 \dots (n-4)} \\ &\quad + \dots + \frac{\overset{1}{A^{n-1}}}{1 \dots (n-1)} \cdot \frac{\overset{1}{A}}{1} \end{aligned}$$

da das bemerkte Gesetz bis zu $\overset{n-1}{A}$ gelten soll. Also

$$\begin{aligned} (2^n - 2) \overset{n}{A} &= \left\{ \frac{1}{1 \dots n} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1 \dots (n-1)} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \dots (n-2)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \dots (n-3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{1 \dots (n-4)} + \dots + \frac{1}{1 \dots (n-1)} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \dots n} \right\} \overset{1}{A^n} - \frac{2}{1 \dots n} \overset{1}{A^n} \\ &= \left\{ 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2}{1 \dots (n-1)} + \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \dots n} \right\} \frac{\overset{1}{A^n}}{1 \dots n} - \frac{2 \overset{1}{A^n}}{1 \dots n} \end{aligned}$$

Also nach der Binomial-Formel für $x = 1$:

$$(2^n - 2) \overset{n}{A} = \frac{2^n \cdot \overset{1}{A^n}}{1 \dots n} - \frac{2 \cdot \overset{1}{A^n}}{1 \dots n} = \frac{(2^n - 2) \cdot \overset{1}{A^n}}{1 \dots n}; \text{ also } \overset{n}{A} = \frac{\overset{1}{A^n}}{1 \dots n},$$

und das bemerkte Gesetz gilt also auch für $\overset{n}{A}$, w. z. b. w.

Es ist also, wenn wir $\overset{1}{A}$ mit A vertauschen:

$$a^x = (1+b)^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{A^n x^n}{1 \dots n} + \dots,$$

und mithin jetzt bloß noch A oder $\overset{1}{A}$ zu bestimmen.

Man findet A oder $\overset{1}{A}$ aber leicht aus der Reihe

$$a^x = (1+b)^x = 1 + \frac{x}{1}b + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3 + \dots$$

Die Glieder in den Entwicklungen der Binomial - Coefficienten, welche bloß x enthalten, sind nämlich augenscheinlich

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1} \text{ in der Entwicklung von } \frac{x}{1}; \\ -\frac{x}{1 \cdot 2} &= -\frac{x}{2} \text{ in der Entwicklung von } \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}; \\ \frac{1 \cdot 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= \frac{x}{3} \text{ in der Entwicklung von } \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \\ -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} &= -\frac{x}{4} \text{ in der Entwicklung von } \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; \\ & \text{u. f. f.} \qquad \text{u. f. f.} \end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} \overset{1}{A} = A &= b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \dots \\ &= \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \frac{(a-1)^5}{5} - \dots \end{aligned}$$

ergiebt.

Es ist demnach

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A^4x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

und

$$A = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \frac{(a-1)^5}{5} - \dots$$

§. 8.

Für $x=1$ giebt diese Reihe

$$a = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

und, wenn man hier $A=1$ setzt:

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Man schließt gewöhnlich, daß hieraus unmittelbar folge, daß umgekehrt für $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$, $A=1$ sey, welches mir aber noch eines Beweises zu bedürfen scheint, der sich auf folgende Art führen läßt.

Sey nämlich

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{1.2.5} + \dots,$$

so kann a) A nicht negativ seyn. Dies zu zeigen, setze man in der Reihe für a^x , $x = A$; so erhält man

$$a^A = 1 + \frac{A^2}{1} + \frac{A^4}{1.2} + \frac{A^6}{1.2.3} + \frac{A^8}{1.2.4} + \dots,$$

woraus erhellet, daß a^A immer eine positive Gröfse und nicht < 1 ist.

Könnte nun für den obigen Werth von a , A negativ $= -A'$ seyn; so wäre, da A' positiv und $a > 1$ ist, $a^{A'} > 1$; also $\frac{1}{a^{A'}} = a^{-A'} = a^A < 1$, welches dem Obigen, daß a^A nie < 1 , widerspricht.

Es ist also A für den obigen Werth von a eine positive Gröfse.

b) A kann nicht > 1 seyn. Denn wäre $A > 1$; so wäre

$$a = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.4} + \dots$$

$$\text{offenbar } > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.4} + \dots$$

gegen die Annahme.

c) A kann nicht < 1 seyn. Denn für $A < 1$ wäre

$$a = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.4} + \dots$$

$$\text{offenbar } < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.4} + \dots$$

gegen die Annahme.

d) Es ist also $A = 1$, w. z. b. w.

Dieser Werth $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{1.2.5} + \dots$ von a , für welchen $A = 1$ ist, ist in der ganzen Mathematik von sehr häufigem Gebrauche, und wird daher immer durch den Buchstaben e bezeichnet.

Auf drey und zwanzig Decimalstellen berechnet, ist

$$e = 2.71828182845904523536028,$$

wo auch noch die letzte Ziffer genau ist.

Aus der Reihe für a^x erhält man leicht, da $A = 1$ ist:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.4} + \dots; \text{ also}$$

$$e^A = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.4} + \dots,$$

d. i. $e^A = a$.

III. Die Logarithmen.

§. 9.

Da für jedes a , $e^A = a$ ist; so ist $A = \text{Log } a$ für das System, dessen Basis e ist. Dieses System, dessen Basis die Zahl $e = 2,71828182$ ist, nennt man das natürliche oder hyperbolische System, und die Logarithmen dieses Systems natürliche oder hyperbolische Logarithmen, und bezeichnet dieselben durch Logn . oder Loghyp . — Hyperbolische werden diese Logarithmen genannt in Beziehung auf eine gewisse Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, worüber das Nähere in der höhern Geometrie vorkommt.

Setzt man für A seinen oben gefundenen Werth; so erhält man

$$\text{Logn } a = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \dots$$

oder für $a = 1 + x$:

$$\text{Logn}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

die bekannte logarithmische Reihe.

$\text{Logn } e$ ist $= 1$, da e die Basis des natürlichen Systems.

Da

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1..4} + \dots,$$

und $A = \text{Logn } a$; so ist

$$a^x = 1 + \frac{x \text{Logn } a}{1} + \frac{x^2 (\text{Logn } a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\text{Logn } a)^3}{1.2.3} + \dots,$$

und für $x = 1$:

$$a = 1 + \frac{\text{Logn } a}{1} + \frac{(\text{Logn } a)^2}{1.2} + \frac{(\text{Logn } a)^3}{1.2.3} + \frac{(\text{Logn } a)^4}{1..4} + \dots$$

oder für $a = x$:

$$x = 1 + \frac{\text{Logn } x}{1} + \frac{(\text{Logn } x)^2}{1.2} + \frac{(\text{Logn } x)^3}{1.2.3} + \frac{(\text{Logn } x)^4}{1..4} + \dots$$

mittelt welcher Reihe die Zahl durch den zugehörigen natürlichen Logarithmen ausgedrückt wird.

§. 10.

Von den natürlichen Logarithmen kann man immer leicht zu den Logarithmen eines jeden andern Systems übergehen.

Man bezeichne durch Log die Logarithmen eines Systems, dessen Basis $= b$ ist; so ist für jede Zahl N , $b^{\text{Log } N} = N$; aber auch $e^{\text{Logn } N} = N$; also $b^{\text{Log } N} = e^{\text{Logn } N}$; also, wenn man die natürlichen Logarithmen auf beiden Seiten nimmt:

$$\text{Log } N \cdot \text{Logn } b = \text{Logn } N; \text{ also } \text{Log } N = \frac{1}{\text{Logn } b} \cdot \text{Logn } N.$$

Um also aus den natürlichen Logarithmen die Logarithmen eines jeden andern Systems zu finden, hat man nur jene mit dem reciproken natürlichen Logarithmen der Basis dieses Systems zu multipliciren.

Dieser constante Factor, mit welchem die Logarithmen des natürlichen Systems multiplicirt werden müssen, um von ihnen zu irgend einem andern logarithmischen Systeme überzugehen, heist der Modulus dieses Systems, und wird gewöhnlich durch M bezeichnet. Für das System mit der Basis b ist also $M = \frac{1}{\text{Logn } b}$. Für das Briggs'sche System z. B. oder die Tabular-Logarithmen, deren Basis bekanntlich $= 10$ ist, ist der Modulus $M = \frac{1}{\text{Logn } 10}$.

Aus den obigen Reihen für $\text{Logn}(1+x)$ durch x , und x durch $\text{Logn } x$, erhält man nach dem Bisherigen für die Logarithmen eines jeden andern Systems:

$$\begin{aligned} \text{Log } x &= M \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) \\ x &= 1 + \frac{\text{Log } x}{1 \cdot M} + \frac{(\text{Log } x)^2}{1 \cdot 2 M^2} + \frac{(\text{Log } x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 M^3} + \frac{(\text{Log } x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 M^4} + \dots, \end{aligned}$$

wo M der Modulus des Systems ist, dessen Logarithmen durch Log bezeichnet werden.

So wie man von dem natürlichen Systeme immer leicht zu jedem andern übergehen kann, so kann man auch leicht von diesem zu jenem übergehen; denn es war $b^{\text{Log } N} = e^{\text{Logn } N}$; also $\text{Log } N = \text{Logn } N \cdot \text{Log } e$; also $\text{Logn } N = \frac{1}{\text{Log } e} \cdot \text{Log } N$. Für das Briggs'sche System z. B. ist $\text{Logn } N = \frac{1}{\text{Log } e} \cdot \text{Log } N$.

§. 11.

Die gefundene Reihe für $\text{Logn}(1+x)$ convergirt nur, wenn x kleiner als die Einheit ist, und ist daher nicht immer zur numerischen Berechnung brauchbar.

Eine immer convergirende Reihe findet man so:

$$\text{Logn}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots; \text{ also}$$

$$\text{Logn}(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots;$$

$$\text{Logn}(1+x) - \text{Logn}(1-x) = \text{Logn}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{2} \text{Logn}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{Logn} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots$$

Für $\frac{1+x}{1-x} = z$ ist $1+x = z - zx$, $x + zx = z - 1$, $x(z+1) = z-1$, $x = \frac{z-1}{z+1}$.

Also

$$\text{Logn} z = 2 \left\{ \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^7 + \dots \right\}$$

oder, wenn man z^2 für z setzt:

$$\text{Logn} z = \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^7 + \dots$$

Da der Modulus M eines Systems, dessen Basis b ist, $= \frac{1}{\text{Logn} b}$ ist; so erhält man aus dieser Formel für $\text{Logn} z$ folgenden Ausdruck für den Modulus:

$$M = \frac{1}{2 \left\{ \left(\frac{b-1}{b+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^5 + \dots \right\}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{b^2-1}{b^2+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{b^2-1}{b^2+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b^2-1}{b^2+1} \right)^5 + \dots}$$

Wenn man $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n}$ setzt, so ist $1+x = 1 + \frac{z}{n} - x - \frac{zx}{n}$, $2x + \frac{zx}{n} = \frac{z}{n}$,

$2nx + zx = z$, $x = \frac{z}{2n+z}$; also

$$\text{Logn}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \text{Logn}\left(\frac{n+z}{n}\right) = \text{Logn}(n+z) - \text{Logn} n =$$

$$= 2 \left\{ \left(\frac{z}{2n+z} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^7 + \dots \right\}$$

oder

$$\text{Logn}(n+z) = \text{Logn} n + 2 \left\{ \left(\frac{z}{2n+z} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \dots \right\}$$

eine Formel, welche vortreffliche Dienste leistet, um aus dem gegebenen Logarithmen irgend einer Zahl n den Logarithmen einer grössern oder kleinern Zahl $n+z$ zu finden. Wenn n nur einigermaßen groß ist, so ist die Convergenz dieser Reihe sehr stark.

Setzt man $n = z = 1$; so erhält man

$$\text{Logn} 2 = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \dots \right\}$$

$$= 0,69314 \quad 71805 \quad 59945 \quad 30941 \quad 72321.$$

Aus $\text{Logn } 2$ findet man leicht $2 \cdot \text{Logn } 2 =$

$$\text{Logn } 4 = 1,38629 \quad 43611 \quad 19890 \quad 61883 \quad 44642.$$

Hieraus ergibt sich

$$\text{Logn } 5 = \text{Logn } 4 + 2 \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^7} + \dots \right\}$$

$$= 1,60943 \quad 79124 \quad 34100 \quad 37460 \quad 07593,$$

und hieraus ferner leicht

$$\text{Logn } 10 = \text{Logn } 5 + \text{Logn } 2 = 2,30258 \quad 50929 \quad 94045 \quad 68401 \quad 79914,$$

woraus man den Modulus des Briggischen Systems erhält. Es ist nämlich dieser Modu-

$$\text{lus} = M = \frac{1}{\text{Logn } 10} = 0,43429 \quad 44819 \quad 03251 \quad 82765 \quad 11289.$$

Da $\text{Log } N = M \text{ Logn } N$; so ist $\text{Logn } N = \frac{1}{M} \text{Log } N = \text{Logn } b \cdot \text{Log } N$, wenn b die Basis des Systems. Um also die natürlichen Logarithmen aus den Briggischen zu finden, muß man diese mit $\text{Logn } 10 = 2,30258 \quad 50929 \dots$ multipliciren.

Ueber

einige Formeln

zur leichten Berechnung des Kreises.

§. 1.

Mittelt der bekannten Reihen, durch welche die Bögen durch ihre trigonometrischen Linien ausgedrückt werden, können alle Bögen, für deren trigonometrische Linien sich algebraische Ausdrücke auffinden lassen, in Theilen des Halbmessers durch Reihen ausgedrückt werden. Ist das Verhältniß dieser Bögen zur ganzen Peripherie rational, so werden hieraus mit Leichtigkeit auch verschiedene Reihenausdrücke für diese erhalten. Jedoch sind nicht alle diese Reihen zur wirklichen Berechnung der Peripherie gleich geschickt, und bedürfen öfters verschiedener Umformungen, um ihnen die erforderliche Convergenz zu verschaffen.

Die vorzügliche Brauchbarkeit einer Reihe zur numerischen Berechnung der durch sie dargestellten GröÙe wird besonders durch folgende Eigenschaften derselben bedingt:

- a) Die Reihe muß stark convergiren, d. i. jedes Glied muß sehr viel kleiner als das vorhergehende seyn, damit schon aus wenigen Gliedern ein hinlänglich genauer Werth der gesuchten GröÙe sich ergebe. Divergente Reihen sind zur numerischen Berechnung völlig untauglich.
- b) Die einzelnen Glieder dürfen nicht sehr zusammengesetzt seyn, sondern müssen so viel als möglich aus einfachen Zahlen bestehen und eine leichte Verwandlung in Decimalbrüche gestatten.
- c) Vorzüglich bequem zur numerischen Berechnung sind die Reihen, deren Glieder so beschaffen sind, daß ein jedes aus dem vorangehenden durch leichte Rechnung erhalten werden kann, wie z. B. die geometrischen und ihnen verwandten, wo jedes Glied aus dem vorhergehenden durch eine bloÙe Multiplication mit dem Exponenten gefunden wird.

Der Halbmesser wird immer $= 1$ gesetzt, und π bezeichnet den Werth der halben Peripherie für den Halbmesser $= 1$, oder den Werth der ganzen für den Durchmesser $= 1$.

Einige der brauchbarsten Reihen dieser Art sind folgende.

§. 2.

Setzt man $\text{ArcTg } x = \frac{1}{4} \pi = \text{Arc } 45^\circ$; so ist $x = 1$; also aus der bekannten Reihe für den Bogen durch die Tangente:

$$\text{I) } \frac{1}{4} \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{u. f. f.}, \text{ oder}$$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{u. f. f.} \right)$$

Diese Reihe ist, wegen des höchst einfachen Gesetzes, nach welchem ihre Glieder fortschreiten, äußerst merkwürdig, zur wirklichen Berechnung aber wegen der geringen Convergenz nicht geschickt. Wollte man durch sie π bis auf n Decimalstellen genau haben, so müßte man wenigstens so viele Glieder in Decimalbrüche verwandeln, bis man auf ein Glied käme, welches keine Decimalziffern der n ten Ordnung mehr enthielte. Aber das fünfte Glied enthält noch Zehnthelle, also geben die ersten fünf Glieder π nicht bis auf Zehnthelchen. Nach *Euler's* Bemerkung müßte man 10^{50} Glieder berechnen, um π bis auf hundert Stellen genau zu haben, welches, wie *Kästner* sich ausdrückt, eine Ewigkeit fordern würde.

$\text{Sin } 45^\circ$ ist bekanntlich $= \frac{1}{\sqrt{2}}$; also giebt die Reihe für den Bogen durch den Sinus

$$\text{II) } \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^3} + \dots \right\}$$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^3} + \dots \right\}$$

Für $\text{ArcTg } x = \frac{1}{6} \pi = \text{Arc } 30^\circ$ ist $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, da $\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2}$ Chord $60^\circ = \frac{1}{2}$,

$\text{Cos } 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Also aus der Reihe für den Bogen durch die Tangente

$$\text{III) } \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{9 \cdot 3^4 \cdot \sqrt{3}} - \text{u. f. f.}$$

$$\pi = \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \text{u. f. f.} \right\} \cdot \sqrt{12}$$

$$= \frac{8}{3} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{3}{9 \cdot 11 \cdot 9^2} + \frac{4}{13 \cdot 15 \cdot 9^3} + \frac{5}{17 \cdot 19 \cdot 9^4} + \dots \right\} \sqrt{12}$$

wenn man immer zwey und zwey Glieder durch die Subtraction vereinigt.

$\text{Sin } 30^\circ$ ist $= \frac{1}{2}$; also aus der Reihe für den Bogen durch den Sinus

$$\text{IV)} \quad \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$\pi = 6 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right\}$$

Diese letztern Reihen convergiren stärker als die Reihe I., vorzüglich III. Die Reihe III. gebrauchte *Abraham Sharp*, ein sehr geschickter Rechner in England gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts, den Umfang bis auf die zwey und siebzigste Decimalstelle genau zu berechnen. Die ganze Rechnung findet man in *Sherwin's Mathematical Tables*, dritte Ausg., London 1742. 8.

§. 3.

Die größte Schwierigkeit bey der Berechnung von π nach der Reihe III. macht die Ausziehung der Quadratwurzel aus 12, welche man auf eben so viele Decimalstellen berechnen muß, als man π genau haben will. Diese sehr beschwerliche Wurzelausziehung zu vermeiden, und zugleich stark convergirende Reihen zu erhalten, hat *Euler* einen Kunstgriff gebraucht, welcher im Allgemeinen in Folgendem besteht. *)

Man zerlege einen Bogen, dessen Verhältniß zur Peripherie rational ist, in zwey oder mehrere andere Bögen, deren Tangenten rational sind; so wird man, wenn man diese Bögen in Reihen entwickelt, für jenen einen Ausdruck erhalten, welcher zwar aus mehrern unendlichen Reihen zusammengesetzt ist, die aber öfters sehr stark convergiren und auch übrigens zur numerischen Berechnung geschickt sind. Am brauchbarsten zu dieser Zerlegung ist der Bogen von 45° oder $\frac{1}{4} \pi$.

§. 4.

Klügel hat die hierher gehörigen Formeln in einer besondern Abhandlung in *Hindenburg's Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Band II. S. 508. ff.: *Formeln zur leichten Berechnung des Kreises*, nach einer Methode entwickelt, welche auf Sätzen der unbestimmten Analytik beruhet. Da mir diese Methode nicht allgemein genug zu seyn schien, so habe ich in dieser Abhandlung versucht, dieselben Formeln nach einer allgemeineren Methode zu entwickeln, welche vorzüglich auf einem merkwürdigen Satze in des Herrn Hofraths *Pfaff Disquisitiones analyticae*, Helmst. 1794. 4., Disq. I. §. X., beruhet. Zu diesem Satze gelangt man auf folgende Art.

*) *L. Euler: De variis methodis circuli quadraturam proxime exprimendi. (Comm. Petrop. vet. Tom. IX. a. a. 1737. p. 222. sqq.) — Introd. in Anal. Inf I §. 142.*

Es ist bekanntlich

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + \operatorname{Tg} x \cdot \sqrt{-1}}{1 - \operatorname{Tg} x \cdot \sqrt{-1}} \right\}; \text{ also}$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t^{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t^{x-1} \cdot \sqrt{-1}}{1 - t^{x-1} \cdot \sqrt{-1}} \right\}, \text{ und folglich}$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t + \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t' + \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t'' + \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t''' + \dots + \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t^{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}} \right\} + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right\} \\ + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t''\sqrt{-1}}{1 - t''\sqrt{-1}} \right\} + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t'''\sqrt{-1}}{1 - t'''\sqrt{-1}} \right\} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t^{x-1}\sqrt{-1}}{1 - t^{x-1}\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \left\{ \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}} \right\} + \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right\} + \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t''\sqrt{-1}}{1 - t''\sqrt{-1}} \right\} \right. \\ \left. + \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t'''\sqrt{-1}}{1 - t'''\sqrt{-1}} \right\} + \dots + \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t^{x-1}\sqrt{-1}}{1 - t^{x-1}\sqrt{-1}} \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}} \right\} \left\{ \frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right\} \left\{ \frac{1 + t''\sqrt{-1}}{1 - t''\sqrt{-1}} \right\} \dots \left\{ \frac{1 + t^{x-1}\sqrt{-1}}{1 - t^{x-1}\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= A \operatorname{Tg} \sqrt{-1} \cdot \left\{ \frac{1 - \frac{(1 + t\sqrt{-1})(1 + t'\sqrt{-1})(1 + t''\sqrt{-1}) \dots (1 + t^{x-1}\sqrt{-1})}{(1 - t\sqrt{-1})(1 - t'\sqrt{-1})(1 - t''\sqrt{-1}) \dots (1 - t^{x-1}\sqrt{-1})}}{1 + \frac{(1 + t\sqrt{-1})(1 + t'\sqrt{-1})(1 + t''\sqrt{-1}) \dots (1 + t^{x-1}\sqrt{-1})}{(1 - t\sqrt{-1})(1 - t'\sqrt{-1})(1 - t''\sqrt{-1}) \dots (1 - t^{x-1}\sqrt{-1})}} \right\}$$

da überhaupt

$$A \operatorname{Tg} \left(\sqrt{-1} \cdot \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} \left\{ \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \operatorname{Logn} x.$$

Herr Hofrath *Pfaff* giebt a. a. O. noch zwey andere Beweise dieses Satzes; wir haben aber den obigen vorgezogen. Aus der bewiesenen allgemeinen Formel folgt leicht

$$m A \operatorname{Tg} t + n A \operatorname{Tg} t' = A \operatorname{Tg} \sqrt{-1} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}} \right)^m \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)^n}{1 + \left(\frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}} \right)^m \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)^n} \right\} \\ = A \operatorname{Tg} \sqrt{-1} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{M + N\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)^n}{1 + \left(\frac{M + N\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)^n} \right\}$$

da bekanntlich $(1 \pm t\sqrt{-1})^m$ immer auf die Form $M \pm N\sqrt{-1}$ gebracht werden kann.

§. 5.

Für $n = 1$ ist also

$$mA \operatorname{Tg} t + A \operatorname{Tg} t' = A \operatorname{Tg} \sqrt{-1} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{M + N\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)}{1 + \left(\frac{M + N\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)} \right\}$$

Um nun einen Bogen, dessen Tangente $= a$ ist, so zu zerlegen, daß er $= m \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t + \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t'$ wird, nehme man t als bekannt an, und setze

$$\sqrt{-1} \cdot \left\{ \frac{1 - \left(\frac{M + N\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)}{1 + \left(\frac{M + N\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1 + t'\sqrt{-1}}{1 - t'\sqrt{-1}} \right)} \right\} = a; \text{ also}$$

$$\frac{a}{\sqrt{-1}} = \frac{(M - N\sqrt{-1})(1 - t'\sqrt{-1}) - (M + N\sqrt{-1})(1 + t'\sqrt{-1})}{(M - N\sqrt{-1})(1 - t'\sqrt{-1}) + (M + N\sqrt{-1})(1 + t'\sqrt{-1})} = -\frac{(N + Mt')\sqrt{-1}}{M - Nt'};$$

$$\text{also } \frac{N + Mt'}{M - Nt'} = a, \quad t' = \frac{aM - N}{aN + M} = \frac{M - N}{M + N} \text{ für } a = 1.$$

Beyspiele.

$$\text{I) } m = 1, \quad t = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad M = 1, \quad N = \frac{1}{2}, \quad t' = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad A \operatorname{Tg} \frac{1}{2} + A \operatorname{Tg} \frac{1}{3} = A \operatorname{Tg} 1 = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\text{II) } m = 2, \quad t = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad (1 + t\sqrt{-1})^2 = 1 - t^2 + 2t\sqrt{-1}, \quad M = 1 - t^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \\ N = 2t = 1, \quad t' = \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{4} + 1} = -\frac{1}{7}, \quad 2A \operatorname{Tg} \frac{1}{2} + A \operatorname{Tg} \left(-\frac{1}{7}\right) = 2A \operatorname{Tg} \frac{1}{2} - A \operatorname{Tg} \frac{1}{7} = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\text{III) } m = 2, \quad t = \frac{1}{3}, \quad a = 1, \quad M = 1 - t^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \quad N = 2t = \frac{2}{3}, \quad t' = \frac{\frac{8}{9} - \frac{2}{3}}{\frac{8}{9} + \frac{2}{3}} \\ = \frac{1}{7}, \quad 2A \operatorname{Tg} \frac{1}{3} + A \operatorname{Tg} \frac{1}{7} = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\text{IV) } m = 3, \quad t = \frac{1}{4}, \quad a = 1, \quad (1 + t\sqrt{-1})^3 = 1 - 3t^2 + (3t - t^3)\sqrt{-1}, \quad M = 1 - 3t^2 = \\ 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}, \quad N = 3t - t^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{64} = \frac{47}{64}, \quad t' = \frac{\frac{13}{16} - \frac{47}{64}}{\frac{13}{16} + \frac{47}{64}} = \frac{5}{99}, \quad 3A \operatorname{Tg} \frac{1}{4} + A \operatorname{Tg} \frac{5}{99} = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\text{V) } m=3, t=\frac{1}{3}, a=1, M=1-3t^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, N=3t-t^3=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27},$$

$$t'=\frac{\frac{2}{3}-\frac{26}{27}}{\frac{2}{3}+\frac{26}{27}}=-\frac{2}{11}, 3A \operatorname{Tg} \frac{1}{3} + A \operatorname{Tg} \left(-\frac{2}{11}\right) = 3A \operatorname{Tg} \frac{1}{3} - A \operatorname{Tg} \frac{2}{11} = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\text{VI) } m=4, t=\frac{1}{5}, a=1, (1+t\sqrt{-1})^4=1-6t^2+t^4+(4t-4t^3)\sqrt{-1}, M=1-6t^2+t^4$$

$$=1-\frac{6}{25}+\frac{1}{625}=\frac{476}{625}, N=4t-4t^3=\frac{4}{5}-\frac{4}{125}=\frac{96}{125}, t'=\frac{\frac{476}{625}-\frac{96}{125}}{\frac{476}{625}+\frac{96}{125}}=-\frac{1}{239},$$

$$4A \operatorname{Tg} \frac{1}{5} + A \operatorname{Tg} \left(-\frac{1}{239}\right) = 4A \operatorname{Tg} \frac{1}{5} - A \operatorname{Tg} \frac{1}{239} = \frac{1}{4} \pi.$$

$$\text{VII) } m=2, t=\frac{1}{10}, a=\frac{1}{5}, M=1-t^2=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}, N=2t=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},$$

$$t'=\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{99}{100} - \frac{1}{5}}{\frac{99}{100} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = -\frac{1}{515}, 2A \operatorname{Tg} \frac{1}{10} + A \operatorname{Tg} \left(-\frac{1}{515}\right) = 2A \operatorname{Tg} \frac{1}{10} - A \operatorname{Tg} \frac{1}{515} = A \operatorname{Tg} \frac{1}{5}.$$

$$\text{VIII) } \frac{1}{4} \pi = 4A \operatorname{Tg} \frac{1}{5} - A \operatorname{Tg} \frac{1}{239} \text{ (VI)} = 8A \operatorname{Tg} \frac{1}{10} - 4A \operatorname{Tg} \frac{1}{515} - A \operatorname{Tg} \frac{1}{239}.$$

Diese Formel führt *Klügel* im *mathematischen Wörterbuche*, I. S. 666., als von Herrn Professor *Buzengeiger* gefunden, an.

§. 6.

Für $n=2$ ist aus §. 4.

$$mA \operatorname{Tg} t + 2A \operatorname{Tg} t' = A \operatorname{Tg} \sqrt{-1} \cdot \left\{ \frac{1 - \left(\frac{M+N\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1+t'\sqrt{-1}}{1-t'\sqrt{-1}} \right)^2}{1 + \left(\frac{M+N\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1+t'\sqrt{-1}}{1-t'\sqrt{-1}} \right)^2} \right\}$$

Um einen Bogen, dessen Tangente $=a$ ist, so zu zerlegen, daß er $= m \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t + 2 \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} t'$ wird, nehme man wieder t als bekannt an, und setze

$$a = \sqrt{-1} \cdot \left\{ \frac{1 - \left(\frac{M+N\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1+t'\sqrt{-1}}{1-t'\sqrt{-1}} \right)^2}{1 + \left(\frac{M+N\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{1+t'\sqrt{-1}}{1-t'\sqrt{-1}} \right)^2} \right\}$$

$$\frac{a}{\sqrt{-1}} = \frac{(M-N\sqrt{-1})(1-t'\sqrt{-1})^2 - (M+N\sqrt{-1})(1+t'\sqrt{-1})^2}{(M-N\sqrt{-1})(1-t'\sqrt{-1})^2 + (M+N\sqrt{-1})(1+t'\sqrt{-1})^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2N\sqrt{-1} - 4Mt'\sqrt{-1} + 2Nt'^2\sqrt{-1}}{2M - 4Nt' - 2Mt'^2} \\
\frac{N + 2Mt' - Nt'^2}{M - 2Nt' - Mt'^2} &= a, \quad N + 2Mt' - Nt'^2 = aM - 2aNt' - aMt'^2, \quad (aM - N)t'^2 + 2(aN + M)t' \\
&= aM - N, \quad t'^2 + 2\left(\frac{aN + M}{aM - N}\right)t' = 1, \quad t'^2 + 2\left(\frac{aN + M}{aM - N}\right)t' + \left(\frac{aN + M}{aM - N}\right)^2 = 1 + \left(\frac{aN + M}{aM - N}\right)^2 \\
&= \frac{(aM - N)^2 + (aN + M)^2}{(aM - N)^2} = \frac{(1 + a^2)(M^2 + N^2)}{(aM - N)^2}, \quad t' + \frac{aN + M}{aM - N} = \frac{\sqrt{(1 + a^2)(M^2 + N^2)}}{aM - N}, \\
t' &= \frac{aN + M}{N - aM} - \frac{\sqrt{(1 + a^2)(M^2 + N^2)}}{N - aM} = \frac{aN + M - \sqrt{(1 + a^2)(M^2 + N^2)}}{N - aM}, \quad \text{oder für } a = 1: \\
t' &= \frac{N + M - \sqrt{2(M^2 + N^2)}}{N - M}.
\end{aligned}$$

Soll t' rational seyn, so muß $\sqrt{2(M^2 + N^2)}$ rational, oder $2(M^2 + N^2)$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Beyspiele.

I) $m = 3$, $(1 + t\sqrt{-1})^3 = 1 - 3t^2 + (3t - t^3)\sqrt{-1}$, $M = 1 - 3t^2$, $N = 3t - t^3$, $M^2 = 1 - 6t^2 + 9t^4$, $N^2 = 9t^2 - 6t^4 + t^6$, $M^2 + N^2 = 1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6 = (1 + t^2)^3$, $2(M^2 + N^2) = 2(1 + t^2)^3$.

$2(1 + t^2)^3$ ist ein vollkommenes Quadrat, wenn $2(1 + t^2)$ eines ist; $2(1 + t^2)$ ist aber für $t = \frac{1}{7}$, $= 2\left(1 + \frac{1}{49}\right) = 2 \cdot \frac{50}{49} = \frac{100}{49} = \left(\frac{10}{7}\right)^2$, also ein vollkommenes Quadrat. $2(M^2 + N^2) = \left(\frac{10}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{50}{49}\right)^2$, $\sqrt{2(M^2 + N^2)} = \frac{10 \cdot 50}{7 \cdot 49} = \frac{500}{343}$, $M = 1 - \frac{3}{49} = \frac{322}{343}$, $N = \frac{3}{7} - \frac{1}{343} = \frac{146}{343}$, $N + M = \frac{468}{343}$, $N - M = -\frac{176}{343}$, $N + M - \sqrt{2(M^2 + N^2)} = -\frac{32}{343}$, $t' = \frac{-\frac{32}{343}}{-\frac{176}{343}} = \frac{32}{176} = \frac{2}{11}$. Also $3A \operatorname{Tg} \frac{1}{7} + 2A \operatorname{Tg} \frac{2}{11} = \frac{1}{4}\pi$.

II) $m = 5$, $(1 + t\sqrt{-1})^5 = 1 - 10t^2 + 5t^4 + (5t - 10t^3 + t^5)\sqrt{-1}$, $M = 1 - 10t^2 + 5t^4$, $N = 5t - 10t^3 + t^5$, $M^2 + N^2 = 1 + 5t^2 + 10t^4 + 10t^6 + 5t^8 + t^{10} = (1 + t^2)^5$, $2(M^2 + N^2) = 2(1 + t^2) \cdot (1 + t^2)^4$, und ist also ein vollkommenes Quadrat, wenn $2(1 + t^2)$ eines ist, also z. B. für $t = \frac{1}{7}$.

Für $t = \frac{1}{7}$ ist $\sqrt{2(M^2 + N^2)} = \frac{25000}{16807}$, $M = 1 - \frac{10}{49} + \frac{5}{2401} = \frac{13412}{16807}$, $N = \frac{5}{7} - \frac{10}{343} + \frac{1}{16807} = \frac{11516}{16807}$, $N + M = \frac{24928}{16807}$, $N - M = -\frac{1896}{16807}$, $N + M - \sqrt{2(M^2 + N^2)} = -\frac{72}{16807}$.

$$t' = \frac{-\frac{72}{16807}}{-\frac{1896}{16807}} = \frac{72}{1896} = \frac{3}{79}, \text{ also } 5A \operatorname{Tg} \frac{1}{7} + 2A \operatorname{Tg} \frac{3}{79} = \frac{1}{4} \pi.$$

III) $m=7$, $(1+t\sqrt{-1})^7 = 1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6 + (7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7)\sqrt{-1}$,
 $M = 1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6$, $N = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7$, $M^2 + N^2 = 1 + 7t^2 + 21t^4 + 35t^6 + 21t^{10} + 7t^{12} + t^{14} = (1+t^2)^7$, $\sqrt{2(M^2 + N^2)} = \sqrt{2(1+t^2)^7} = (1+t^2)^3 \cdot \sqrt{2(1+t^2)}$, und ist
 also rational, wenn $2(1+t^2)$ ein vollkommenes Quadrat ist, also z. B. für $t = \frac{1}{7}$.

$$\text{Für } t = \frac{1}{7} \text{ ist } M = 1 - \frac{21}{49} + \frac{35}{2401} - \frac{7}{117649} = \frac{482552}{823543}, N = \frac{7}{7} - \frac{35}{343} + \frac{21}{16807} - \frac{1}{823543} \\ = \frac{740536}{823543}, \sqrt{2(M^2 + N^2)} = \frac{10}{7} \cdot \left(\frac{50}{7}\right)^3 = \frac{1250000}{823543}, N + M = \frac{1223088}{823543}, N - M = \frac{257984}{823543}.$$

$$M + N - \sqrt{2(M^2 + N^2)} = -\frac{26912}{823543}, t' = -\frac{\frac{26912}{823543}}{\frac{257984}{823543}} = -\frac{26912}{257984} = -\frac{29}{278}. \text{ Also}$$

$$7A \operatorname{Tg} \frac{1}{7} + 2A \operatorname{Tg} \left(-\frac{29}{278}\right) = 7A \operatorname{Tg} \frac{1}{7} - 2A \operatorname{Tg} \frac{29}{278} = \frac{1}{4} \pi.$$

Die Formeln in §. 5. und §. 6. sind dieselben, welche *Klügel* a. a. O. nach einer andern, aber, wie es uns scheint, nicht so allgemeinen Methode erhalten hat.

§. 7.

I. Aus §. 5. I. erhält man

$$\frac{1}{4} \pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{u. f. f.} \\ + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{u. f. f.} \end{array} \right\}$$

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{u. f. f.} \\ + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{u. f. f.} \end{array} \right\}$$

Diese Ausdrücke giebt *Euler* a. a. O.

II. Aus §. 5. III. erhält man

$$\frac{1}{4} \pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \frac{1}{9 \cdot 7^9} - \dots \\ + 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \dots \right) \end{array} \right\}$$

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{7} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 7^2} + \frac{1}{5 \cdot 7^4} - \frac{1}{7 \cdot 7^6} + \frac{1}{9 \cdot 7^8} - \dots \right) \\ + \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} - \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \frac{1}{9 \cdot 9^4} - \dots \right) \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{343} \left(\frac{73}{1 \cdot 3} + \frac{169}{5 \cdot 7 \cdot 7^4} + \frac{265}{9 \cdot 11 \cdot 7^8} + \frac{361}{13 \cdot 15 \cdot 7^{12}} + \dots \right) \\ + \frac{16}{27} \left(\frac{13}{1 \cdot 3} + \frac{29}{5 \cdot 7 \cdot 9^2} + \frac{45}{9 \cdot 11 \cdot 9^4} + \frac{61}{13 \cdot 15 \cdot 9^6} + \dots \right) \end{array} \right.$$

wenn man immer je zwey und zwey Brüche mit entgegengesetzten Vorzeichen zusammenzieht.

III. Aus §. 5. VI. erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = \left\{ \begin{array}{l} 4 \left(\frac{1}{1 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \dots \right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \frac{1}{9 \cdot 239^9} - \dots \right) \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{1 \cdot 5} - \frac{1}{239} = \frac{4}{1 \cdot 5} - \frac{1}{239}$$

$$- \left(\frac{4}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{8 \cdot 4}{8 \cdot 5^3} - \frac{1}{239 \cdot 239^2} \right)$$

$$+ \left(\frac{4}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{5 \cdot 239^5} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{8 \cdot 4^2}{8 \cdot 4 \cdot 5^5} - \frac{1}{239 \cdot 239^4} \right)$$

$$- \left(\frac{4}{7 \cdot 5^7} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} \right) - \frac{1}{7} \left(\frac{8 \cdot 4^3}{8 \cdot 4^2 \cdot 5^7} - \frac{1}{239 \cdot 239^6} \right)$$

$$+ \left(\frac{4}{9 \cdot 5^9} - \frac{1}{9 \cdot 239^9} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{8 \cdot 4^4}{8 \cdot 4^3 \cdot 5^9} - \frac{1}{239 \cdot 239^8} \right)$$

$$- \text{u. f. f.} \quad - \text{u. f. f.}$$

$$= \frac{4}{1 \cdot 5} - \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{8 \cdot 4}{1000} - \frac{1}{239 \cdot 57121} \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \left(\frac{8 \cdot 4^2}{100000} - \frac{1}{239 \cdot 57121^2} \right)$$

$$- \frac{1}{7} \left(\frac{8 \cdot 4^3}{10000000} - \frac{1}{239 \cdot 57121^3} \right)$$

$$+ \frac{1}{9} \left(\frac{8 \cdot 4^4}{1000000000} - \frac{1}{239 \cdot 57121^4} \right)$$

$$- \text{u. f. f.}$$

Diese Form giebt Herr Professor *Bürmann* der Reihe, in seiner Abhandlung: *Berechnung des Kreises*, in dem *Archiv für reine und angewandte Mathematik*, Band II. S. 487. ff.

IV. Aus §. 5. VIII. erhält man

$$\pi = \begin{cases} 32 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \frac{1}{9 \cdot 10^9} - \dots \right) \\ -16 \left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3 \cdot 515^3} + \frac{1}{5 \cdot 515^5} - \frac{1}{7 \cdot 515^7} + \frac{1}{9 \cdot 515^9} - \dots \right) \\ -4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \frac{1}{9 \cdot 239^9} - \dots \right) \end{cases}$$

Diese drey Reihen convergiren alle sehr stark.

V. Aus §. 6. II. erhält man

$$\pi = \begin{cases} 20 \left(\frac{1}{1 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \frac{1}{9 \cdot 7^9} - \dots \right) \\ +8 \left(\frac{3}{79} - \frac{1}{3 \cdot 79^3} + \frac{1}{5 \cdot 79^5} - \frac{1}{7 \cdot 79^7} + \frac{1}{9 \cdot 79^9} - \dots \right) \end{cases}$$

Vermischte Bemerkungen.

Geometrische Aufgabe

Vier Punkte A, B, C, D, welche aus einem Standpunkte A gesehen werden, liegen in einer geraden Linie AD. Die Winkel $\angle AEB = \alpha$, $\angle AEC = \gamma$, $\angle AED = \delta$, so wie die Entfernung AB = a, der Winkel von A aus, und die Entfernung CD = b des dritten vom vierten, sind gegeben, man finde die Entfernung AC.



Lösung

$$\triangle AEB = \frac{AE \cdot ED \cdot \sin(\alpha + \delta)}{b}, \triangle AED = \frac{AE \cdot ED \cdot \sin \delta}{b}$$

$$\triangle AEB : \triangle AED = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin \delta} = \frac{AB}{ED} = \frac{a}{b}$$

$$\triangle CED = \frac{CE \cdot ED \cdot \sin \delta}{b}, \triangle AED = \frac{AE \cdot ED \cdot \sin \delta}{b}$$

$$\triangle CED : \triangle AED = \frac{CE}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{b}{a}$$

$$ED \cdot \sin \delta \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot \sin \delta \cdot ED$$

Man erhält man die Proportion I durch die Proportion II, so erhält man

$$\frac{\sin(\alpha + \delta + \gamma)}{\sin \delta} = \frac{a + b + x}{b} = \frac{a + b + x}{b}$$

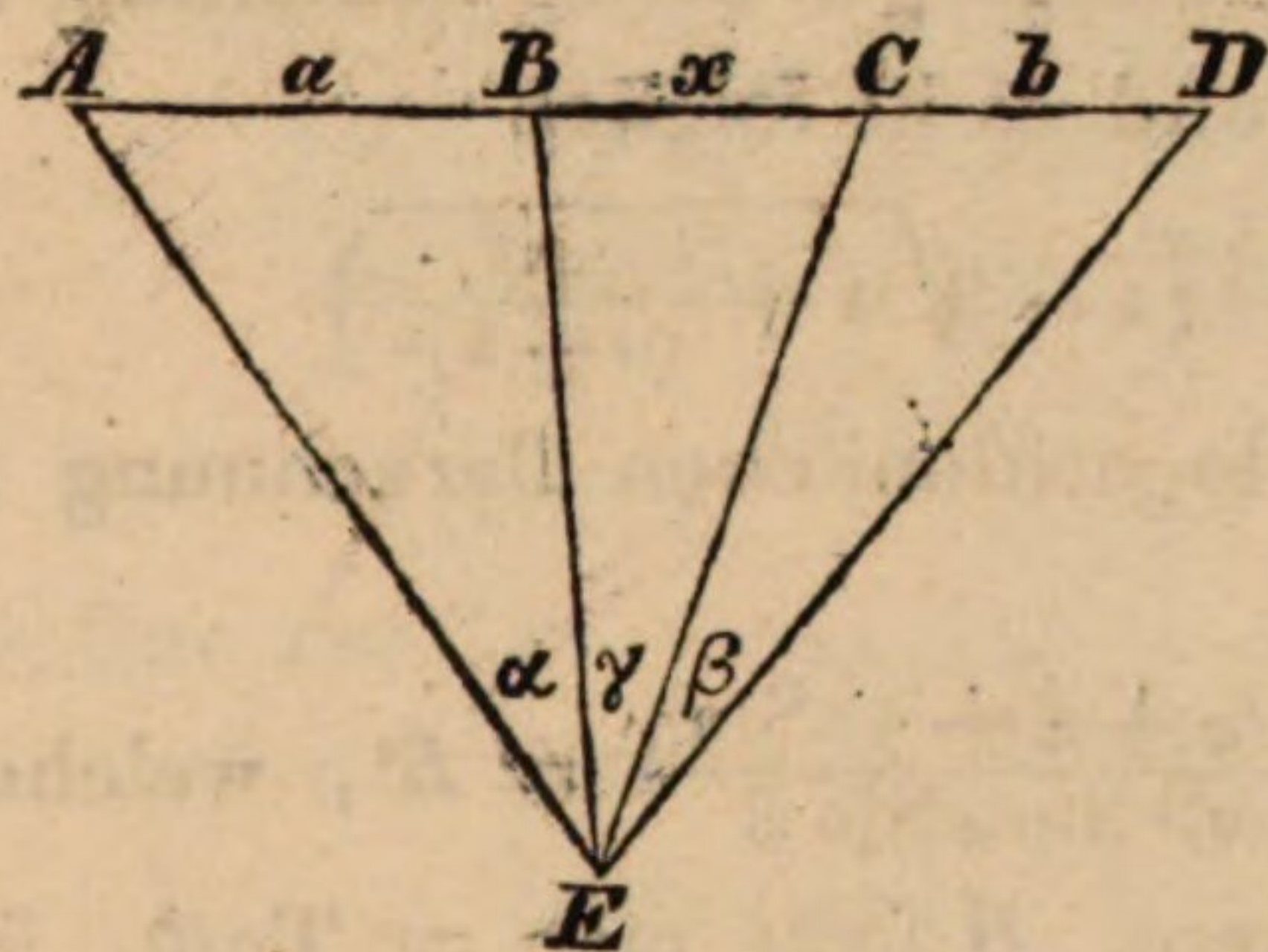
$$\frac{\sin(\alpha + \delta + \gamma)}{\sin \delta} = \frac{a + b + x}{b} = \frac{a + b + x}{b}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \delta + \gamma)}{\sin \delta} = \frac{a + b + x}{b} = \frac{a + b + x}{b}$$

I.

Geometrische Aufgabe.

Vier Objecte A, B, C, D , welche aus einem Standpunkte E gesehen werden, liegen in einer geraden Linie AD . Die Winkel $AEB = \alpha$, $BEC = \gamma$, $CED = \beta$, so wie die Entfernung $AB = a$ des ersten vom zweyten, und die Entfernung $CD = b$ des dritten vom vierten, sind gegeben; man sucht die Entfernung $BC = x$ des zweyten vom dritten.



Auflösung.

$$\Delta AED = \frac{AE \cdot ED \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{2}, \quad \Delta AEB = \frac{AE \cdot EB \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$\Delta AED : \Delta AEB = AD : AB = a + b + x : a$$

$$ED \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) : EB \cdot \sin \alpha = a + b + x : a \quad (\text{I.})$$

$$\Delta CED = \frac{CE \cdot ED \cdot \sin \beta}{2}, \quad \Delta BEC = \frac{BE \cdot EC \cdot \sin \gamma}{2}$$

$$\Delta CED : \Delta BEC = CD : BC = b : x$$

$$ED \cdot \sin \beta : BE \cdot \sin \gamma = b : x \quad (\text{II.})$$

Dividirt man nun die Proportion I. durch die Proportion II., so erhält man

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \beta} : \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a + b + x}{b} : \frac{a}{x}.$$

Also

$$\frac{a \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{x \sin \beta} = \frac{(a + b + x) \sin \alpha}{b \sin \gamma}$$

$$\frac{ab \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = (a + b + x)x = x^2 + (a + b)x.$$

Man setze $\frac{ab \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = A$, so ist $x^2 + (a+b)x = A$;

$$\text{also } x^2 + (a+b)x + \frac{(a+b)^2}{4} = A + \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$x + \frac{a+b}{2} = \pm \sqrt{A + \frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{A + \frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$= -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a+b}{2} \sqrt{1 + \frac{4A}{(a+b)^2}}$$

$$= -\frac{a+b}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4A}{(a+b)^2}} \right).$$

Nähme man das untere Zeichen, so erhielte man für x einen negativen Werth, welcher bey dieser Aufgabe offenbar gar keine Bedeutung haben kann; man muß also das obere Zeichen nehmen, und es ist folglich

$$x = -\frac{a+b}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4A}{(a+b)^2}} \right).$$

Diese Formel kann zur logarithmischen Berechnung auf folgende Art bequemer eingerichtet werden.

Es sey $\frac{4A}{(a+b)^2} = \frac{4ab \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \gamma}{(a+b)^2 \sin \alpha \sin \beta} = B^2$, welches immer leicht durch Logarithmen berechnet werden kann. B setze man $= \text{Tg } \varphi$, so ist $1 + B^2 = 1 + \text{Tg } \varphi^2 = \text{Sec } \varphi^2$, also $x = -\frac{a+b}{2} (1 - \text{Sec } \varphi)$; aber $1 - \text{Sec } \varphi = 1 - \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi} = \frac{(\cos \varphi - 1)(\cos \varphi + 1)}{\cos \varphi (\cos \varphi + 1)} = \frac{\cos \varphi^2 - 1}{\cos \varphi (\cos \varphi + 1)} = -\frac{\sin \varphi^2}{\cos \varphi (\cos \varphi + 1)} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1}$

$$= -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos \frac{1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{1}{2} \varphi^2} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = -\text{Tg } \varphi \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} \varphi. \text{ Also}$$

$$x = \left(\frac{a+b}{2} \right) \text{Tg } \varphi \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} \varphi = \frac{(a+b) \text{Tg } \varphi \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} \varphi}{2}; \text{ eine Formel, welche zur logarithmischen Berechnung sehr bequem ist.}$$

Andere Auflösungen dieser Aufgabe haben gegeben *Lambert*, *Meyer Hirsch* und *Rode*.

Exempel.

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha & = & 16^\circ 32' \\
 \beta & = & 7^\circ 15' \\
 \gamma & = & 20^\circ 11' \\
 \alpha + \beta + \gamma & = & 43^\circ 58'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 a & = & 20^\circ 6' = 20,6 \\
 b & = & 12^\circ 7' = 12,7 \\
 a + b & = & 33,3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log } 4 & = & 0,6020600 \\
 \text{Log } a & = & 1,3138672 \\
 \text{Log } b & = & 1,1038037 \\
 \text{Log Sin } (\alpha + \beta + \gamma) & = & 9,8415095 - 10 \\
 \text{Log Sin } \gamma & = & 9,5378508 - 10 \\
 \hline
 & & 2,3990912
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log } (a + b) & = & 1,5224442 \\
 \text{Log } (a + b)^2 & = & 3,0448884 \\
 \text{Log Sin } \alpha & = & 9,4541939 - 10 \\
 \text{Log Sin } \beta & = & 9,1010558 - 10 \\
 \hline
 & & 1,6001381
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log } B^2 & = & 0,7989531 \\
 \text{Log } B = \text{Log Tg } \varphi & = & 10,3994765 \\
 \varphi & = & 68^\circ 16' 6'',2 \\
 \frac{1}{2} \varphi & = & 34^\circ 8' 3'',1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log } (a + b) & = & 1,5224442 \\
 \text{Log Tg } \varphi & = & 10,3994383 - 10 \\
 \text{Log Tg } \frac{1}{2} \varphi & = & 9,8311794 - 10 \\
 \hline
 & & 1,7530619
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log } 2 & = & 0,3010300 \\
 \text{Log } x & = & 1,4520319 \\
 x & = & 28,327
 \end{array}$$

II.

Summierung der Cubikzahlen.

Es ist $x + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2}$, welches durch leichte Rechnung gefunden wird.

Also, wenn man auf beiden Seiten in's Quadrat erhebt: $x^2 + x^2(x-1) + \left[\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 = x^3 + \left[\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 = \left[\frac{(x+1)x}{1 \cdot 2}\right]^2$. Setzt man nun nach und nach 1, 2, 3, 4, ... $x-1$, x für x , so erhält man:

$$1 + \left(\frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}\right)^2$$

$$2^3 + \left(\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}\right)^2$$

$$3^3 + \left(\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)^2$$

$$4^3 + \left(\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}\right)^2$$

.

$$(x-1)^3 + \left[\frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}\right]^2 = \left[\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\right]^2$$

$$x^3 + \left[\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 = \left[\frac{(x+1)x}{1 \cdot 2}\right]^2$$

Addirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf, was sich aufheben läßt, so erhält man:

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (x-1)^3 + x^3 = \left[\frac{(x+1)x}{1 \cdot 2}\right]^2;$$

eine bekannte Formel aus der Algebra, welche aber sonst, wie es mir scheint, nicht so einfach bewiesen wird.

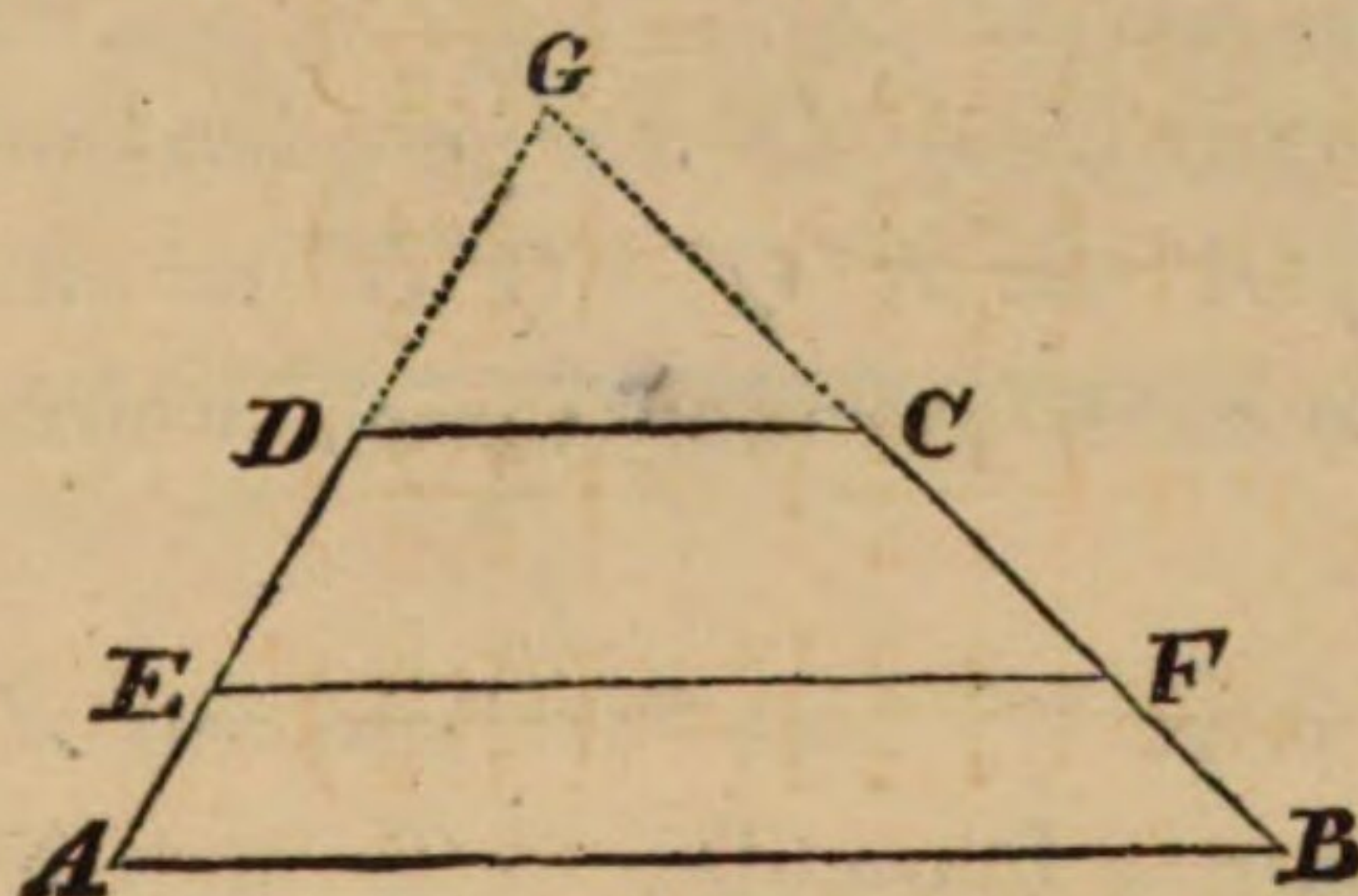
III.

Satz über den Schwerpunkt.

Der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Dreyecke, welche sich zwischen drey Parallellinien beschreiben lassen, ist eine mit diesen Linien parallele gerade Linie.

Beweis.

1) Sey $ABCD$ ein Trapezium, so ist, wenn $EF \parallel CD \parallel AB$ ist, $DE:EA = CF:FB$ und $DE:DA = EF - CD:AB - CD$.



Beweis.

a) Man verlängere AD und BC , bis sie sich in G schneiden; so ist

$$GD:GC = DE:CF$$

$$GD:GC = DA:CB$$

$$DE:CF = DA:CB$$

$$DE:DA = CF:CB$$

$$DE:DA - DE = CF:CB - CF$$

$$DE:EA = CF:BF.$$

b)

$$GE:GD = EF:DC$$

$$GA:GD = AB:DC$$

$$GE - GD:GD = EF - DC:DC$$

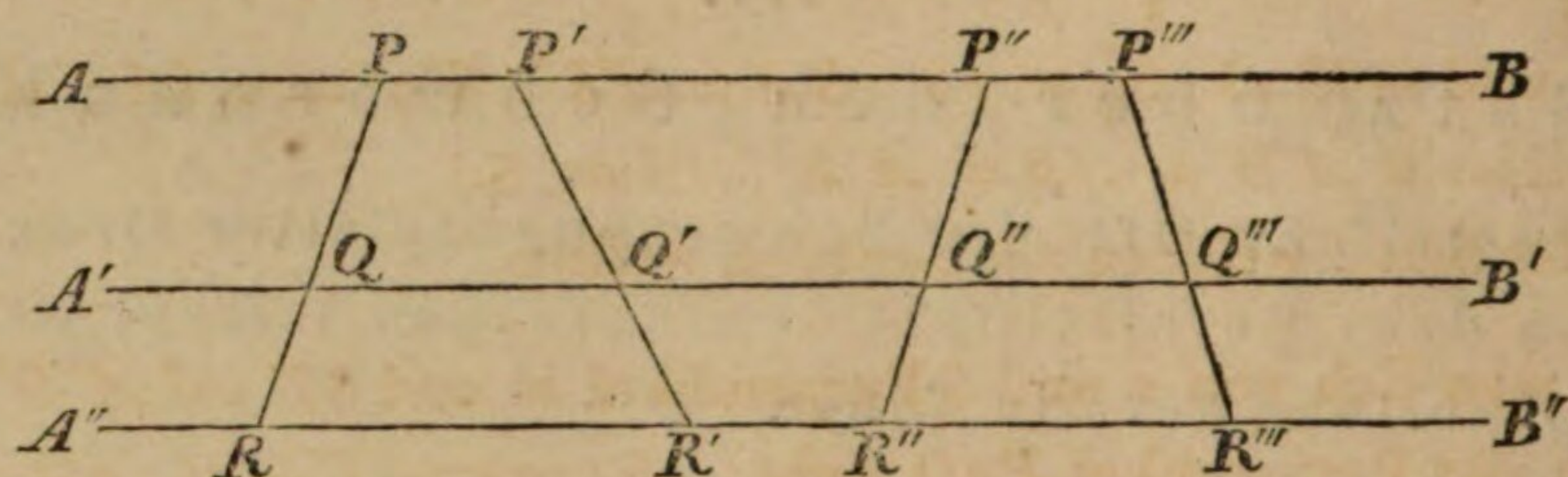
$$GA - GD:GD = AB - DC:DC$$

$$GE - GD:GA - GD = EF - DC:AB - DC$$

$$ED:AD = EF - DC:AB - DC.$$

Es ist klar, daß der Satz a. auch gelten würde, wenn $ABCD$ ein Parallelogramm wäre.

2) Sind drey Linien AB , $A'B'$, $A''B''$ parallel, und



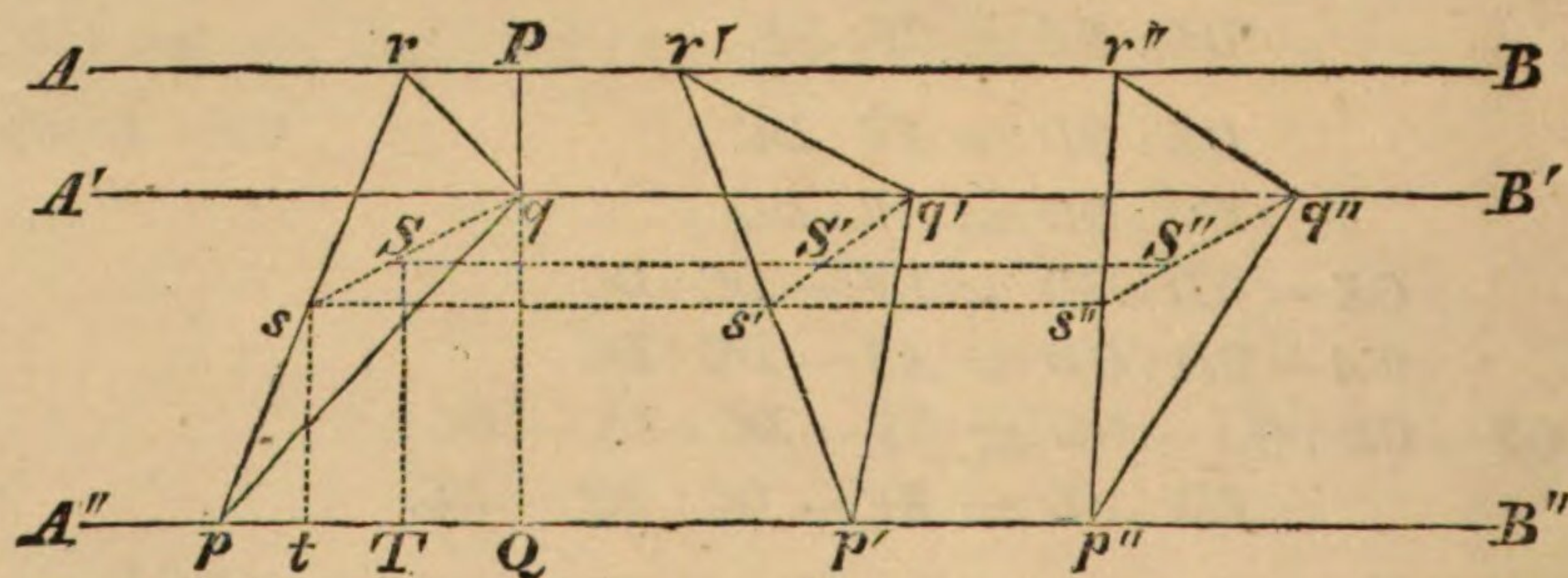
zwischen denselben willkürlich PQR , $P'Q'R'$, $P''Q''R''$, u. f. w. gezogen; so ist nach Num. 1. a.:

$$PQ : QR = P'Q' : Q'R' = P''Q'' : Q''R'' = P'''Q''' : Q'''R''' = \text{u. f. f.}$$

3) Ist umgekehrt die gerade Linie AB der geraden Linie $A''B''$ parallel und $PQ : QR = P'Q' : Q'R' = P''Q'' : Q''R'' = P'''Q''' : Q'''R''' = \text{u. f. f.}$; so liegen die Punkte Q , Q' , Q'' , Q''' , u. f. f. in einer geraden Linie, welche den Linien AB , $A''B''$ parallel ist.

Denn man denke sich durch Q eine Parallele mit AB und $A''B''$ gezogen, welche $P'R'$ in einem gewissen Punkte q schneide, so ist nach Num. 1. $PQ : QR = P'q : qR'$; aber $PQ : QR = P'Q' : Q'R'$; also $P'q : qR' = P'Q' : Q'R'$, $P'q : P'q + qR' = P'Q' : P'Q' + Q'R'$, d. i. $P'q : P'R' = P'Q' : P'R'$, also $P'q = P'Q'$, und q fällt folglich mit Q' zusammen, oder die Parallele durch Q geht auch durch Q' , und folglich auf dieselbe Art auch durch Q'' , Q''' , u. f. w., so daß also unser Satz bewiesen ist.

4) Seyen nun pqr , $p'q'r'$, $p''q''r''$, u. f. f. Dreyecke zwischen drey Parallellinien. Man halbire pr , $p'r'$, $p''r''$, u. f. f.



in s , s' , s'' , u. f. f., und ziehe qs , $q's'$, $q''s''$, u. f. f.; so ist $ss's''$ eine gerade Linie, welche $\parallel AB \parallel A'B'$, da $rs : sp = r's' : s'p' = r''s'' : s''p'' = \text{u. f. f.}$, (Num. 3.). Nimmt man nun $sS =$

$\frac{1}{3} sq, s'S' = \frac{1}{3} s'q', s''S'' = \frac{1}{3} s''q'',$ u. f. f.; so sind $S, S', S'',$ u. f. f. die Schwerpunkte der Dreyecke, und es ist $sS : Sq = s'S' : S'q' = s''S'' : S''q'' =$ u. f. f.; also $SS'S''$ eine gerade Linie, welche $\# A'B' \# AB \# A''B'',$ (Num. 3.).

Dies war der Satz, welchen wir beweisen wollten.

5) Denkt man sich von s und S Perpendikel st und ST auf $A''B''$ gezogen, so ist, wenn man noch das Perpendikel PqQ zieht: $sS : sq = ST - st : qQ - st$ (Num. 1. b.) $= sS : 3sS = 1 : 3,$ also $3ST - 3st = qQ - st, 3ST = qQ + 2st = qQ + PQ,$ da $ps = sr$ ist. Also $ST = \frac{1}{3} (qQ + PQ)$ die Entfernung der Linie $SS'S''$ von $A''B''.$

Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für die Entfernungen der Linie $SS'S''$ von AB und $A'B'.$

IV.

Beweis des Brounker'schen Ausdrucks für das Quadrat des Durchmessers.

Der Lord *Brounker*, der erste Präsident der englischen Societät, hat einen Ausdruck für das Quadrat des Durchmessers gefunden, welcher in verschiedener Rücksicht merkwürdig ist, auch deshalb, weil dies der erste Gebrauch ist, welcher von den Kettenbrüchen gemacht worden ist. Die Methode, nach welcher *Brounker* seine Formel gefunden hat, ist noch unbekannt; *Wallis* bemühte sich zwar, zu zeigen, wie *Brounker* auf die Formel gekommen sey, seine Darstellung ist aber nach *Euler's* Urtheile unbefriedigend, und scheint von der Methode des Erfinders ganz verschieden zu seyn.

Nach dem gegenwärtigen Zustande der Analysis [kommt es bey dem Beweise des Brounker'schen Ausdrucks vorzüglich auf die Verwandlung der bekannten Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{u. s. f.} = \frac{1}{4} \pi$ in einen Kettenbruch an, welche, wie es mir scheint, auf folgende Art am leichtesten bewerkstelligt wird.

Man setze die Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+2n} - \frac{1}{x+3n} + \frac{1}{x+4n} - \frac{1}{x+5n} + \dots = f(x), \text{ so ist}$$

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x+3n} - \frac{1}{x+4n} + \frac{1}{x+5n} - \dots = f(x+n); \text{ also}$$

$$f(x) + f(x+n) = \frac{1}{x}, \quad xf(x) + xf(x+n) = 1$$

$$1 - xf(x) - xf(x+n) = 0$$

$$1 - xf(x) - xf(x+n) + x^2f(x) \cdot f(x+n) = x^2f(x) \cdot f(x+n)$$

$$1 - xf(x) - [1 - xf(x)] xf(x+n) = x^2f(x) \cdot f(x+n)$$

$$[1 - xf(x)][1 - xf(x+n)] = x^2f(x) \cdot f(x+n)$$

$$1 - xf(x) = \frac{x^2f(x) \cdot f(x+n)}{1 - xf(x+n)}$$

$$\frac{1}{f(x)} - x = \frac{x^2f(x+n)}{1 - xf(x+n)} = \frac{x^2}{\frac{1}{f(x+n)} - x} = \frac{x^2}{n + \frac{1}{f(x+n)} - (x+n)}$$

$$\text{Setzt man nun } \frac{1}{f(x)} - x = f'(x); \text{ so ist } \frac{1}{f(x+n)} - (x+n) = f'(x+n);$$

$$\text{also nach dem Vorhergehenden } f'(x) = \frac{x^2}{n + f'(x+n)}, \text{ und folglich}$$

$$f'(x+n) = \frac{(x+n)^2}{n+f'(x+2n)},$$

$$f'(x+2n) = \frac{(x+2n)^2}{n+f'(x+3n)},$$

$$f'(x+3n) = \frac{(x+3n)^2}{n+f'(x+4n)},$$

u. f. f.

u. f. f.

Also durch Substitution $f'(x) = \frac{x^2}{n} + \frac{(x+n)^2}{n} + \frac{(x+2n)^2}{n} + \frac{(x+3n)^2}{n} + \text{u. f. f.}$

Es ist aber $\frac{1}{f(x)} = x + f'(x)$; also $f(x) = \frac{1}{x+f'(x)}$; also

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{n} + \frac{(x+n)^2}{n} + \frac{(x+2n)^2}{n} + \frac{(x+3n)^2}{n} + \text{u. f. f.}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+2n} - \frac{1}{x+3n} + \frac{1}{x+4n} - \dots$$

Für $n = 2$ und $x = 1$ wird $f(x) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

$$= \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \frac{81}{2} + \dots$$

Die Kreisfläche K ist $= r^2 \cdot \pi = 4r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$; also $d^2 = \frac{4}{\pi} \cdot K = \frac{4}{\pi}$, für $K = 1$.

Wird also die Kreisfläche $= 1$ gesetzt, so ist das Quadrat des Diameters, d. i.

$$d^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \frac{81}{2} + \dots$$

Dies ist die Brounker'sche Formel.

V.

Einige Bemerkungen über die Kettenbrüche.

1. Jede gegebene Gröſſe x kann bekanntlich in einen Kettenbruch verwandelt werden, deſſen Zähler alle $= 1$ und deſſen Nenner lauter poſitive ganze Zahlen ſind. Um nämlich x in einen ſolchen Kettenbruch zu verwandeln, mache man $x = \alpha + \frac{1}{x'}$, wo α das größte in x enthaltene Ganze bezeichnet, und eben ſo mache man $x' = \beta + \frac{1}{x''}$, $x'' = \gamma + \frac{1}{x'''}$, $x''' = \delta + \frac{1}{x^{(4)}}$, u. ſ. f., wo β, γ, δ , u. ſ. f. die größten in x', x'', x''' , u. ſ. f. enthaltenen Ganzen bezeichnen. Es wird nun

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}$$

der geſuchte Kettenbruch für x ſeyn. Wenn x eine Rationalzahl iſt, beſteht der Kettenbruch aus einer endlichen, wenn aber x eine Irrationalzahl iſt, aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern.

2. Man könnte die Frage aufwerfen, ob ſich eine Gröſſe x nicht vielleicht auf mehrere Arten durch einen Kettenbruch von obiger Form ausdrücken lieſſe. Auf dieſe Frage giebt folgender Satz die Antwort:

Jede Gröſſe läßt ſich nur auf eine einzige Art durch einen Kettenbruch ausdrücken, deſſen Zähler alle $= 1$ und deſſen Nenner lauter poſitive ganze Zahlen ſind.

Dieſer Satz ſcheint mir in der Theorie der Kettenbrüche nicht ganz ohne Wichtigkeit zu ſeyn, obgleich ich ihn noch in keiner der mir bekannten Schriften über die Kettenbrüche aufgeſtellt und bewieſen gefunden habe. Ich gebe den Beweis daher hier als einen kleinen Beytrag zu der ſo wichtigen Theorie der continuirlichen Brüche.

3. Ehe wir aber zu dem Beweiſe ſelbſt übergehen, müſſen wir noch einige vorläufige Bemerkungen vorausſchicken.

Bezeichnet man die Partialwerthe des Bruchs $\alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}$ nach der Reihe durch $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}, \frac{P'''}{Q'''}$, u. ſ. w.; ſo iſt bekanntlich $\frac{P'}{Q'} = \frac{P\beta + 1}{Q\beta}$, $\frac{P''}{Q''} = \frac{P'\gamma + P}{Q'\gamma + Q}$,

$\frac{P'''}{Q'''} = \frac{P''\delta + P'}{Q''\delta + Q'}$, u. f. w., welches fast in allen Schriften über die Kettenbrüche bewiesen wird.

Bezeichnet man nun aber die Partialwerthe des Kettenbruchs $\beta + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \dots$ nach der Reihe durch $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}, \frac{P'''}{Q'''}$, u. f. w.; so ist $\frac{P}{Q} = \frac{\beta}{1}$; also $\frac{P'}{Q'} = \frac{\alpha P + Q}{P}$. Es ist auch $\frac{P''}{Q''} = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1} = \frac{\alpha(\beta\gamma + 1) + \gamma}{\beta\gamma + 1}$; aber $\frac{P'}{Q'} = \frac{\beta\gamma + 1}{\gamma}$; also $\frac{P''}{Q''} = \frac{\alpha P' + Q'}{P'}$, und ganz auf ähnliche Art findet man, daß $\frac{P'''}{Q'''} = \frac{\alpha P'' + Q''}{P''}$ ist, woraus das allgemeine Gesetz schon erhellet. Bezeichnet man nämlich z. B. den n ten Partialwerth des ersten Kettenbruchs durch $\frac{M''}{N''}$ und den $(n-1)$ ten Partialwerth des zweyten Kettenbruchs durch $\frac{M'}{N'}$; so ist $\frac{M''}{N''} = \frac{\alpha M' + N'}{M'}$, welches auf folgende Art allgemein bewiesen werden kann.

Man nehme nämlich dieses Gesetz bis zum n ten Partialwerthe des ersten Kettenbruchs als richtig an, und bezeichne den $(n-1)$ ten, n ten und $(n+1)$ ten Partialwerth des ersten Kettenbruchs durch $\frac{M'}{N'}, \frac{M''}{N''}$ und $\frac{M'''}{N'''}$, und den $(n-2)$ ten, $(n-1)$ ten und n ten Partialwerth des zweyten Kettenbruchs durch $\frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}$ und $\frac{M''}{N''}$, so ist nach der oben angeführten Relation

$$\frac{M'''}{N'''} = \frac{M''\pi + M'}{N''\pi + N'},$$

wenn π der n te Nenner ist. Nun gilt aber nach der Annahme die zu beweisende Relation bis zum n ten Partialwerthe des ersten Kettenbruchs, also ist

$$\frac{M''}{N''} = \frac{\alpha M' + N'}{M'}, \quad \frac{M'}{N'} = \frac{\alpha M + N}{M}. \quad \text{Also}$$

$$\begin{aligned} \frac{M'''}{N'''} &= \frac{(\alpha M' + N')\pi + \alpha M + N}{M'\pi + M} \\ &= \frac{\alpha(M'\pi + M) + N'\pi + N}{M'\pi + M}, \end{aligned}$$

aber nach der ersten Relation $\frac{M''}{N''} = \frac{M'\pi + N}{M'\pi + M}$, also $\frac{M'''}{N'''} = \frac{\alpha M'' + N''}{M''}$, und die Relation gilt also auch für den $(n+1)$ ten Partialwerth des ersten Kettenbruchs, und ist demnach allgemein.

4. Wir gehen nun zu dem Beweise unsers Satzes selbst über. Die Partialwerthe der Kettenbrüche

$$\alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \dots}}, \quad \beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}, \quad \gamma + \frac{1}{\delta + \frac{1}{\varepsilon + \dots}},$$

u. f. f. u. f. f. u. f. f.

bezeichnen wir nach der Reihe durch

$$\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D}, \dots$$

$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{C} \quad \mathfrak{D}$

$$\frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D}, \frac{\varepsilon}{E}, \dots$$

$\mathfrak{B} \quad \mathfrak{C} \quad \mathfrak{D} \quad \mathfrak{E}$

$$\frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D}, \frac{\varepsilon}{E}, \frac{\zeta}{F}, \dots$$

$\mathfrak{C} \quad \mathfrak{D} \quad \mathfrak{E} \quad \mathfrak{F}$

u. f. f. u. f. f.

Für sich ist klar, daß alle Partialwerthe eines Kettenbruchs, dessen erstes Glied (α) nicht $= 0$ ist, unächte Brüche, im entgegengesetzten Falle aber ächte Brüche sind.

I) Es sey $x = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}$

$\dots + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda}$ ein endlicher Kettenbruch, wo λ

immer größer als 1 ist; denn wäre $\lambda = 1$, so wäre der letzte Nenner $= \mu + 1$. Nach der bewiesenen Relation und der angenommenen Bezeichnung ist

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha B + \mathfrak{B}}{B} = \alpha + \frac{\mathfrak{B}}{B}$$

$$\frac{\beta}{B} = \frac{\beta C + \mathfrak{C}}{C} = \beta + \frac{\mathfrak{C}}{C}$$

$$\frac{\gamma}{C} = \frac{\gamma D + \mathfrak{D}}{D} = \gamma + \frac{\mathfrak{D}}{D}$$

u. f. f. u. f. f.

$$\frac{\frac{\lambda}{K}}{\frac{\lambda}{\mathfrak{K}}} = \frac{\frac{\lambda}{xL} + \frac{\lambda}{\mathfrak{L}}}{\frac{\lambda}{L}} = x + \frac{\frac{\lambda}{\mathfrak{L}}}{\frac{\lambda}{L}}$$

Da nun die Brüche in der letzten Verticalreihe offenbar lauter ächte Brüche sind, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x$ die grössten in den Brüchen der ersten Reihe enthaltenen Ganzen, und der letzte Bruch $\frac{\frac{\lambda}{\mathfrak{L}}}{\frac{\lambda}{L}}$ in der letzten Verticalreihe ist offenbar

$= \lambda$. Es ist also klar, daß jeder Kettenbruch, welcher der Grösse x gleich ist, und dessen Zähler alle $= 1$ sind, mit dem Kettenbruche identisch ist, welchen man nach der in 1. angegebenen Methode für x erhält, so daß also überhaupt alle Kettenbrüche für x von der angegebenen Form identisch sind.

II) Wäre $x = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \dots + \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} + \dots$ ein unendlicher Ket-

tenbruch, so sey $y = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} + \dots$, also $x = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \dots + \frac{1}{x+y}$

wo $x + y > 1$. Auf dieselbe Art wie vorher würde man nun zeigen, daß die in 1. angegebene Methode der Verwandlung in Kettenbrüche für x den Bruch

$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \dots + \frac{1}{x+y}$ giebt. Man kann aber x so weit von α entfernt annehmen, als man will; daher sind auch in diesem Falle alle Kettenbrüche von der obigen Form, welche $= x$ sind, identisch.

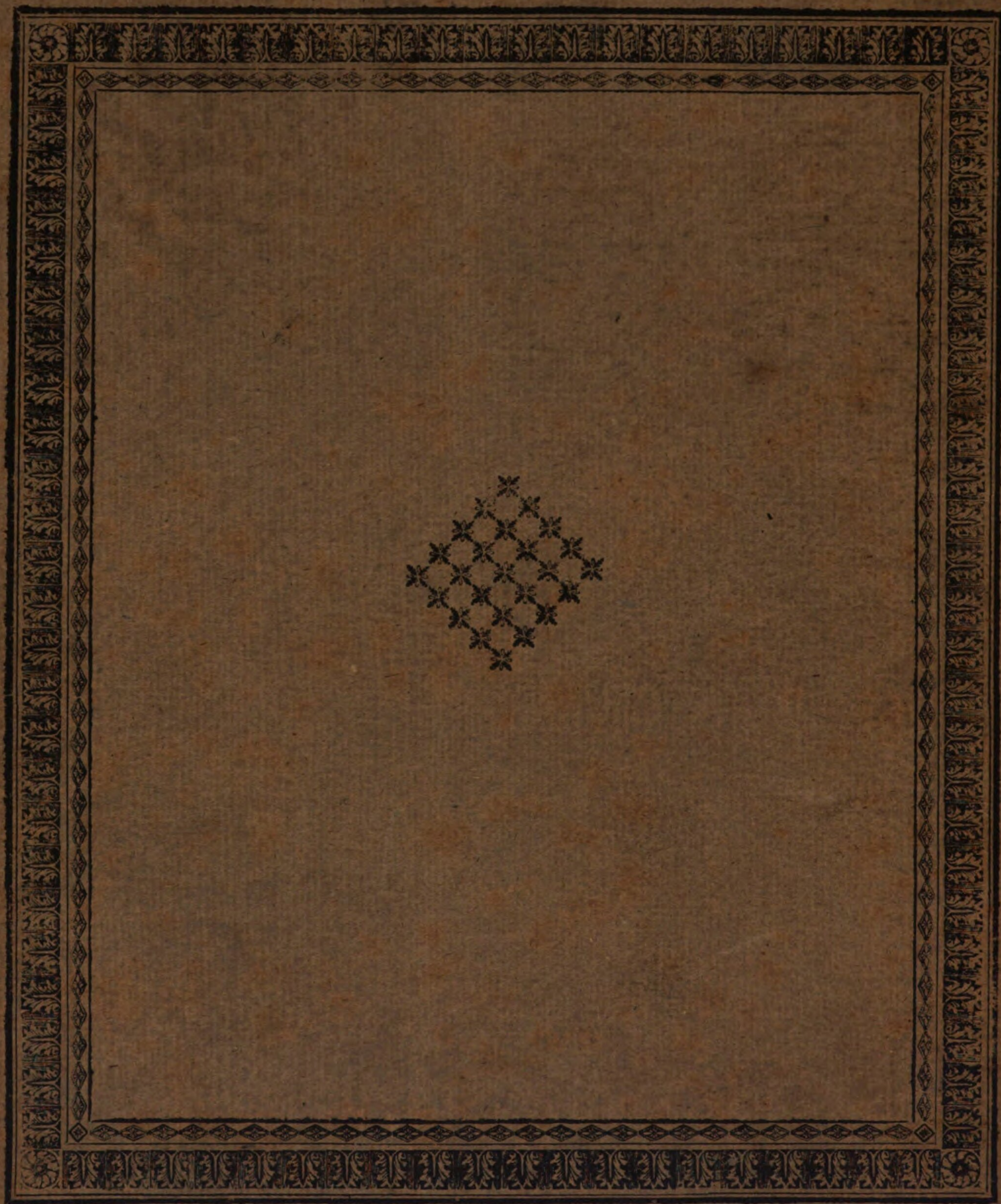
B e r i c h t i g u n g e n .

Seite 64. Zeile 6. und 8. zu Anfang für — lese man +.

Seite 79. Zeile 12. muß das n nach dem Zeichen $=$ nahe an der Klammer { stehen.

Seite 85. Zeile 2. von unten muß das Gleichheitszeichen vor dem Bruchstriche stehen.

Gedruckt in Halle bey Friedrich Grunert, dem Vater des Verfassers.



H. HEINRIC
Buchbinderei
Rotterdam

Grunert, Johann August,

Mathematische Abhandlungen Samml. 1

Altona 1822

4 Math.u. 38 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525593-2